

**Гариб Джалалов
Магомед Дунямалыев
Мехри Ханбабаева**

**Гидрогазодинамика процессов
фильтрации флюидов
в напряженно деформированных пластах**

Palmarium Academic Publishing

Impressum / Выходные данные

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:

Palmarium Academic Publishing

ist ein Imprint der / является торговой маркой

OmniScriptum GmbH & Co. KG

Bahnhofstraße 28, 66111 Saarbrücken, Deutschland / Германия

Email / электронная почта: info@palmarium-publishing.ru

Herstellung: siehe letzte Seite /

Напечатано: см. последнюю страницу

ISBN: 978-3-659-72134-2

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2016 OmniScriptum GmbH & Co. KG

Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2016

Под общей редакцией *член-корр. НАНА Г.И.Джалалова*

Джалалов Г.И., Дунямалыев М.А., Ханбабаева М.Г.

Гидрогазодинамика процессов фильтрации флюидов в напряженно деформированных пластах.

328 стр.

В книге рассматриваются вопросы математического моделирования процессов фильтрации жидкостей и газов в напряженно-деформированных пористых и трещиноватых средах. В работе впервые произведено математическое моделирование динамики развития дилатансионно-пластической зоны вокруг действующей эксплуатационной скважины при нестационарном режиме фильтрации флюидов. Установлена связь между полученными из скважины расходами жидкой и твердой фаз и предложены критерии регулирования ее с помощью пластового давления. Сформированы и точными аналитическими методами решены задачи о нестационарной фильтрации жидкости к совершенным и несовершенным скважинам в однородных, однородно-анизотропных и кусочно-однородных по проницаемости пластах. Анализ полученных результатов позволил теоретически исследовать вопрос о влиянии наследственных свойств пористой среды на характер фильтрации и на отдельные технологические показатели разработки месторождений. Результаты, приведенные в работе можно использовать для практических рекомендаций обоснования выбора технологического режима нефтяной и газовой скважин в неустойчивых коллекторах, прогнозирования выноса песка и борьбы с ним в процессе эксплуатации месторождения.

Предложены аналитические методы прогнозирования показателей разработки нефтяных и газовых залежей, приуроченных к трещиновато-пористым коллекторам, при работе скважин (галерей) с заданным забойным давлением и любых соотношениях проницаемостей и упругоёмкостей системы трещин и блоков. Исследованы качественные и количественные характеристики взаимодействия блоков и трещин. Показана возможность использования полученных точных решений в качестве эталонных для проверки различных приближенных методов исследования.

Монография рассчитана на научных и инженерно-технических работников.

Джалалов Г.И., Дунямалыев М.А., Ханбабаева М.Г., 2016

Введение

Известно, что деформации насыщенных пористых сред, как правило, приводят к ухудшению их коллекторских свойств, что ведет к снижению добычи нефти и газа. Однако ползучесть матрицы пласта приводит к релаксации напряжений давления и гидродинамических параметров, что увеличивает время развития воронок депрессии в скважинах.

Если процессы фильтрации в обычных поровых коллекторах изучены достаточно хорошо, то закономерности движения жидкости в деформируемых средах находятся в стадии их углубленного исследования.

Рассмотрению различных аспектов этой проблемы посвящены многочисленные работы как отечественных, так и зарубежных исследователей. Вместе с тем, целый ряд ее принципиальных положений требует своего усовершенствования. В частности, недостаточно исследованы вопросы, связанные с более полным учетом реальных факторов, влияющих на развитие гидродинамической обстановки в подверженном деформации коллекторе и массоперенос насыщающих его флюидов. Поэтому при проектировании разработки нефтегазовых месторождений необходимо учитывать влияние всех указанных факторов на динамику фильтрационного потока.

При эксплуатации нефтяных месторождений, сложенных слабоцементированными и рыхлыми породами, вместе с извлекаемой жидкостью в скважину поступает песок. Поступление разрушенной породы осложняет и нарушает нормальный режим работы скважин. Оно приводит к

образованию песчаных пробок в скважинах, преждевременному износу и выходу из эксплуатации скважинного оборудования.

Вынос большого объема песка из пласта обуславливает образование каверн в призабойной зоне пласта, что при достижении критических размеров сопровождается обвалами вышележащих пород и деформациями, приводящими к выходу скважин из эксплуатации.

Важнейшей проблемой рациональной эксплуатации месторождений, сложенных слабоцементированными и рыхлыми породами, является предотвращение поступления песка из пласта в скважину. В связи с этим, возникает необходимость разработки технических средств и технологических процессов, увеличивающих межремонтный период работы и срок службы пескопроявляющих скважин.

Так как при эксплуатации пескопроявляющих скважин в призабойной зоне пласта (ПЗП) образуются дилатансионно-пластические зоны, где разрушается скелет породы и выносятся песок, чтобы выбрать способ крепления ПЗП, необходимо определить параметры этих зон.

Как известно, технологический режим работы скважины, эксплуатация которой сопровождается выносом песка, определяется при условии максимально возможного ограничения твердых фрагментов пласта в стволе скважины. Поэтому этот режим должен обеспечивать постепенную нагрузку скважины и её работу с минимальными скоростями фильтрации. На практике это достигается постепенным увеличением дебита до некоторого максимального значения, при котором вынос песка находится в допустимых пределах. В связи с этим изучение механизма развития упруго-пластических зон вокруг эксплуатационной скважины, определение порового давления вдоль пласта и выноса объема разрушенных твердых пород в скважину при разработке слабоцементированных месторождений со сложными рео-

логическими свойствами представляют актуальность и имеют большой практический интерес.

Настоящая работа посвящена изложению целого круга задач. Выполнен комплекс аналитических и численных исследований по совершенствованию математического моделирования пластовых систем, предложены расчетные схемы (и алгоритмы) для их практического использования при решении задач разработки пластов с деформируемыми терригенными и трещиноватыми коллекторами.

Глава I.
**СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ
ВЛИЯНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ГОРНЫХ ПОРОД НА
ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЗАЛЕЖАХ
НЕФТИ И ГАЗА**

В последние годы открыто и осваивается значительное число нефтяных залежей с осложненными физико-геологическими условиями. Влияние этих осложнений на технологические решения велико и необходимость учета на всех стадиях разработки очевидна. В первую очередь, этим осложнениям относятся аномальные термодинамические условия в залежах на больших глубинах.

Опыт разработки нефтяных залежей подтверждает, что при понижении пластового давления существенно возрастает эффективное давление, величина которого может быть весьма существенной. При разработке залежей с аномально высоким пластовым давлением наблюдается более значительное изменение эффективного давления. При понижении пластового давления отмечается большой диапазон колебания между текущим эффективным и начальным давлениями на глубине залегания. При экспериментальных исследованиях образцов горных пород отмечено, что породы, приуроченные к зонам развития аномально высоких пластовых давлений (АВПД), как правило, проявляют меньшие прочностные характеристики и небольшую способность к деформированию по сравнению с аналогичными породами из интервалов разреза без АВПД. Это подтверждают и промысловые наблюдения. С ростом глубины зале-

гания продуктивных пород, т.е. с увеличением горного давления - P_2 эффективное давление также возрастает.

Основные параметры, характеризующие прочностные свойства пород, являются функциями эффективного давления. При достижении уровня напряженного состояния предел прочности и текучести приводит к возникновению необратимых изменений пористости и проницаемости. В этом случае для описания деформационного поведения породы-коллектора уже не достаточно применения только упругих констант материалов, слагающих эти породы.

Задачи фильтрации флюидов в условиях линейно-упругой и нелинейно-упругой деформации горных пород в нефтяных и газовых пластах достаточно подробно были исследованы в работах Л.С.Лейбензона, В.Н.Щелкачева, М.Маскета, Ю.П.Желтова, М.Т.Абасова, Э.Х.Азимова, Г.И.Джалалова, К.Н.Джалилова, С.Н.Закирова, А.М.Кулиева, А.М.Дунямалыева, В.А.Черных, В.Н.Николаевского, К.С.Басниева, А.Т.Горбунова, Е.С.Ромма, Р.Г.Исаева, Н.П.Лебединца, Г.А.Зотова, Г.И.Баренблатта, А.П.Крылова и др.

Первые научные результаты в теории упругопластического режима фильтрации были получены Г.И.Баренблаттом и А.П.Крыловым в 1955 г. [22]. Несколько позднее Ю.П.Желтовым были проведены обширные теоретические исследования деформации горных пород и механического взаимодействия продуктивного пласта с потоком пластовых флюидов в рамках упругого и упруго-пластического режима фильтрации. Для рассматриваемой области явлений им был предложен новый термин «механика нефтегазонасного пласта» [49].

А.Г.Горбунов [27] обратил внимание на создание обобщенной теории фильтрации с учетом необратимых изменений упомянутых параметров. В этом направлении проведены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования, которые привели к новому расчет-

ному методу определения технологических показателей разработки месторождений.

При эксплуатации скважин начальное пластовое давление уменьшается. Падение давления в поровом пространстве приводит к увеличению эффективных напряжений в скелете пласта и при определенных условиях происходит перемещение частиц скелета, которые инициируют изменение его структуры. С одной стороны, фильтрация жидкости в зависимости от поведения пористой среды может происходить как при упругих деформациях, так и при жесткопластических и упруго-пластических деформациях. С другой – степень остаточной деформации также зависит от состава жидкости, насыщающей пористую среду.

При разрушении насыщенных пористых сред, ведущую роль играют эффективные напряжения. По мнению Терцаги К. все измеримые эффекты изменения напряжений, такие как сжатие, искажение формы и изменение сопротивления сдвигу происходят исключительно благодаря изменению эффективных напряжений.

Известно, что горные породы в отличие от твердого тела обладают свойством дилатансии. Поэтому реальные законы деформации глубинных пластов требуют построения более сложных реологических моделей горных пород. Однако общий анализ процессов деформирования наталкивается на значительные трудности и исследователи прибегают к поискам различных возможных упрощений в постановке и решении конкретных задач.

Классические задачи об устойчивости или ограниченном равновесии исследовались на основании модели жесткопластического материала, свойства которого определены единственным значением предела прочности. Поэтому с целью адекватного описания реальной ситуации далее предлагается использовать более сложную упруго-пластическую модель, в которой предельное состояние является

как функцией модуля деформации, так и функцией предела прочности [82]. Однако деформирование реальных горных пород (исключая очень рыхлый песок в испытаниях с дренажем) после достижения точки разрушения продолжается при уменьшающемся напряжении, т.е. происходит уменьшение предела прочности при возрастании деформации до тех пор, пока напряжение не установится на некотором конечном или остаточном уровне [83]. Здесь главной проблемой является формулировка адекватных определяющих законов деформирования. Действительно, деформирование гранулированных горных пород происходит при взаимном проскальзывании зерен, а большому пиковому значению напряжения сопутствует хрупкое разрушение. Впервые такое исследование было выполнено D.Drucker'ом, W.Prager'ом, согласно которому с использованием пластического потенциала, было получено соотношение между деформациями и напряжениями. С математической точки зрения предложенная ими модель, так называемый ассоциированный закон, совместно с условием Мора-Кулона, вполне удобна для изучения полей скорости и напряжения. Из ассоциированного закона следует очень важный вывод: пластические деформации должны сопровождаться увеличением объема. Это свойство известно под названием дилатансии [69]. Закономерность расширения упруго-пластических зон в таких породах вокруг выработки исследована в [97]. Показано, что в зависимости от значения главного напряжения вокруг неё могут возникнуть максимум три пластические зоны.

В работе [14] рассматривается возникновение и расширение пластической зоны вокруг действующей скважины в пласте, подчиняющейся условию текучести Мизеса-Губера-Шлейхера и ассоциированному закону деформации. Получены аналитические соотношения между радиусами пластических зон параметров пласта и дебита скважины. В [66] рассмотрены вопросы влияния порового и горного

давлений на устойчивость призабойной зоны действующей скважины. Отметим, что неровное горное давление приводит к локализации пластического разрушения пород [36], приводящих к просадке дневной поверхности территории месторождения.

В теории пластичности обычно считается, что линии скольжения касательного разрыва служат характеристиками полей скоростей. В модели Друккера-Прагера показано что из-за дилатансии на этой характеристике скачку касательной скорости всегда сопутствует скачок нормальной скорости. Если представить скачкообразную зону в виде полосы малой ширины, то эта зона должна непрерывно расширяться. Однако этот результат связан не с ассоциированным законом, а с эффектом дилатансии.

Скорость дилатансии в переходной зоне по мере пластической деформации убывает и расширение этой зоны постепенно прекращается.

Проведенные качественные рассуждения и экспериментальные расчеты А. Bishop'a показывают, что по мере роста пластической деформации плотной горной породы ослабляется сопротивление сдвигу и убывает угол внутреннего трения. Пористые скальные породы, находящиеся под внешним горным давлением, дилатируют по мере их упругого деформирования перед разрушением и наблюдается распространение трещины.

Для сыпучих сред внутренние силы незначительно влияют на их механическое поведение. Такая категория сред включает в себя песок, крупный ил, гравий и дробленую горную породу. Названные среды отличаются от других пород также и тем, что все образцы обладают заметной дилатансией при сдвиге и при большом падении порового давления [70, 90]. Проведенные испытания показывают, что для определения условий разрушения необходимо знание всех трех компонентов главных эффективных

напряжений. При известных наибольшего, среднего и наименьшего главных эффективных напряжений предложены основные условия разрушения [83]. A.Bishop провел испытание при плоском деформировании и обосновал условия разрушения [82].

При оценке упругопластического массива в окрестности скважины необходимо учитывать состояние окружающих горных пород как материала с изменяющимися в процессе нагружения физико-механическими свойствами. Если на некотором достаточном удалении от скважины породный массив является практически сплошным и его можно считать подчиняющимся линейному закону Гука, то по мере приближения к скважине породы находятся в разрыхленном состоянии, причем степень разрыхления тем больше, чем меньше расстояние от контура скважины до рассматриваемой точки. Максимальное разрыхление наблюдается на самом контуре.

Развитие систем трещин в данной области происходит постепенно и не приводит к полному разрушению элементарного объема пород.

Эксплуатация залежей, продуктивная толща которых сложена слабосцементированными и рыхлыми породами, осложняется размывом, разрушением и выносом пород из призабойной зоны скважины. Поступление разрушенной породы осложняет и нарушает нормальный режим работы скважин. Оно приводит к образованию песчаных пробок в скважинах, преждевременному износу и выходу из эксплуатации внутрискважинного оборудования. В то же время вынесенная на поверхность разрушенная порода, оседая в трубопроводах и резервуарах, создает значительные технологические трудности и дополнительные затраты.

В процессе фильтрации происходит изменение пористости и проницаемости в зависимости от пластового давления и выноса песчинок со временем.

Количество выносимого песка зависит от скорости фильтрации жидкости.

В работе А.Т.Горбунова [27] даны четыре схемы выноса песка при различных режимах фильтрации жидкости в процессе разработки нефтяных месторождений.

После разрушения скелета пласта в скважину начинают интенсивно поступать твердые фрагменты. В начальной стадии нагружения скелета вокруг эксплуатационной скважины возникает упругопластическая деформация и происходит интенсивный вынос твердых пород. За этой зоной пласт находится в упругом напряженно-деформированном состоянии, с понижением забойного давления упругая зона уменьшается. По азербайджанским и западно-сибирским месторождениям установлено, что при прочих равных условиях и резком увеличении депрессии вынос песка растет значительно быстрее, чем при медленном достижении той же депрессии. Этот факт объясняется разными схемами и подробно изложен в книге [27]. Например, в Малгобекском месторождении при начальном пластовом давлении 43 кг/см^2 скважины вступили в эксплуатацию с дебитами 50-70 тон/сутки при депрессиях $10-15 \text{ кг/см}^2$. В течение 2-3 лет пластовое давление упало до 20 кг/см^2 и одновременно отмечался усиленный вынос песка и образование пробок. При освоении Астраханского и Ахтырско-Бугундырского месторождений исследователи, также столкнулись с резким выносом песка, что свидетельствует о том, что весь песчаник пласта уже превратился в песок. Вынос песка вместе с жидкостью проявляется не только на многих нефтяных месторождениях, но и на газовых месторождениях. Как утверждалось в работе В.В.Масленникова и В.С.Ремизова, течение песка происходит лишь по тонкому рыхлому прослою. Такие слои на практике могут быть выделены с помощью сейсмических или радиометрических методов.

Возможная причина пескопроявления из пласта объясняется пульсационным режимом работы и возникающими при этом высокочастотными малоамплитудными волнами, приводящими к усилению концентрации напряжений вокруг скважин. Исследования, проведенные А.Ф.Лебедовым, показывают, что разрушение призабойной зоны скважины связано с плавным состоянием сыпучих сред.

Влияние реологических свойств горных пород, в т.ч. вязкоупругих, идеально пластичных, вязкопластичных, упруго-вязкопластичных и наследственных, на процессы фильтрации было исследовано в работах Р.Г.Исаева и В.А.Черных.

В работах В.А.Черных предложены новые математические модели, позволяющие рассчитывать в рамках линейной теории упругости сложные напряженные состояния пласта-коллектора и массива окружающих горных пород при любом распределении давления флюида по объему залежи произвольной формы [98].

Большая заслуга в создании научных основ геомеханики процессов разработки нефтяных и газовых месторождений принадлежит В.Н.Николаевскому [68]. В работах В.Н.Николаевского поставлены проблемы геомеханики процессов разработки месторождений нефти и газа и в определенной степени решены на современном научном уровне. В первую очередь это касается анализа уравнений механики горных пород с учетом дилатансии, нестационарных движений насыщенных пористых сред, упругого и неупругого режима фильтрации, динамического воздействия на пласт с целью увеличения нефтеотдачи. Одним из первых В.Н.Николаевский совместно с Т.К.Рамазановым исследовали напряженно-деформированное состояние пласта-коллектора с учетом механического взаимодействия его с массивом окружающих горных пород. Развивая далее эти работы Т.К.Рамазанов решил ряд задач нелокально-упруго-

го режима фильтрации с учетом неупругости горных пород [75-78].

Влияние дилатансии на проницаемость породы выражается в том, что при одноосном сжатии проницаемость образца вначале уменьшается, затем увеличивается с появлением микротрещин и, наконец, уменьшается при необратимом уплотнении породы. Математические модели влияния дилатансии на процессы добычи нефти и газа впервые были разработаны В.Н.Николаевским.

Дальнейшее исследование фильтрации в первоначально неуплотненных горных породах показало, что во многих случаях представление о кусочно –линейной деформации не описывает точно механизм фильтрации в породах, деформирующихся по сложным реологическим законам. Оказалось, что необходимо учитывать то, что деформирующаяся горная порода не мгновенно приходит в равновесное деформированное состояние, а в ней возникает явление релаксации.

Так появилось представление о реологическом режиме нефтяных пластов, впервые введенное Ю.П.Желтовым, и начало развиваться в работах Ю.М.Молоковичам, М.Т.Абасовам, К.Н.Джалиловам, А.М.Кулиевам, Н.Н.Непримеровам, Р.Г.Исаевам, И.М.Аметовам, К.С.Басниевам, М.А.Дуньямалыевам, З.А.Керимовам, М.Г.Ханбабаевой и др.

Проведенные нами исследования показали, что несмотря на полученные результаты в области теории релаксационной фильтрации, имеются серьезные трудности при исследовании как прямых, так и обратных задач. Кроме того, эти исследования показали, что некоторые результаты и методические подходы для решения прямых и обратных задач релаксационной фильтрации требуют проведения дополнительных исследований и уточнений. Более обширный обзор исследований в этом направлении приведен в работах [10, 46, 47 и др.].

В связи с тем, что с каждым годом увеличивается число разрабатываемых трещиноватых месторождений с высоким пластовым давлением, эксплуатирующихся при значительных перепадах давления, возникает необходимость учета реальных свойств флюидов и породы при гидродинамических расчетах [34]. Согласно исследованиям, проведенным в работах Е.С.Роммом, Р.Г.Исаевым и др., трещиноватые нефтяные пласты часто расчленены регулярно ориентированными системами трещин. В этом случае среда является анизотропной и ее проницаемость зависит от густоты трещин, их раскрытости, ориентации и давления.

Ряд задач по исследованию влияния анизотропии проницаемости терригенных и трещиноватых пластов на характеристики фильтрационного потока рассмотрен в [34].

В целом, принимая во внимание существенно произвольный характер изменения функции проницаемости, математическое моделирование неоднородных и анизотропных по проницаемости пластов остается актуальным и по сей день.

Дальнейший анализ современного состояния рассматриваемых проблем приводится непосредственно в соответствующих главах.

Глава II.
ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ДИНАМИКИ
ДИЛАТАНСИОННО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ
ВОКРУГ ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СКВАЖИНЫ
В СЛАБОЦЕМЕНТИРОВАННЫХ НЕФТЯНЫХ
КОЛЛЕКТОРАХ

Интенсификация разработки слабоцементированных нефтегазовых месторождений, с одной стороны, требует увеличения как пластового давления, так и градиента давления, с другой стороны, приводит к интенсивному выносу разрушенной породы. Поэтому одной из проблем подземной гидродинамики является изучение механизма развития упругопластических зон вокруг действующей скважины, регулирования пластового давления и выноса объема поступления разрушенных пород в скважину.

Математическое моделирование процесса фильтрации флюида в дилатирующих зонах вокруг скважины изучены в [14, 77]. В некоторых из перечисленных работах не обращено внимание на скачкообразное изменение пористости на упругопластической границе.

В данном разделе в общем виде изучаются гидродинамические и геометрические характеристики упругопластической зоны пласта вокруг эксплуатационной скважины. Метод определения радиуса данной зоны может быть применен при создании фильтров в скважинах и укреплении призабойной зоны, а информация об объеме выноса разрушенной породы – для предотвращения образования пробок.

2.1. Постановка задачи.

Пусть в плоскорадиальном пласте мощностью h работает одна центральная совершенная скважина с началь-

ным радиусом a_0 . При мгновенной работе скважины с постоянным дебитом Q_f происходит развитие дилатансионно-пластической зоны и интенсивный вынос породы с дебитом $Q_s(t)$ в скважину. За пределом пластической зоны пласт ведет себя как линейно-упругая среда и в этой области на контуре питания R_k поддерживается постоянное пластовое давление p_k . Граница, разделяющая пластическую область от упругой $R(t)$, значительно меньше, чем R_k . На бесконечности выполняется условие покоя, т.е. радиальное эффективное напряжение σ_{rr}^f и пористость m постоянны и равны начальным значениям σ_k^f , m_0 и т.д. Требуется определить динамику интенсивности выноса твердых пород пласта, радиусов дилатансионно-пластической зоны и изменения давления на стенке скважины.

Для пластической зоны уравнения неразрывности твердой и жидкой фаз в случае осевой симметрии имеют вид [14, 73, 77]:

$$\frac{\partial(1-m)\rho_s}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(1-m)\rho_s \mathcal{G}] = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial m \rho_f}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r m \rho_f w) = 0,$$

Уравнения равновесия твердого скелета и движение жидкости с учетом скорости движения твердой фазы (обобщение закона Дарси) представлены ниже:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^f}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^f - \sigma_{\theta\theta}^f}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{k}{\mu_o} \frac{\partial p}{\partial r} = -m(w - \mathcal{G}), \quad (2.2)$$

Кроме этого имеем дилатансионное соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + \frac{\mathcal{G}}{r} &= \Lambda \sqrt{\frac{3}{3-\Lambda^2}} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} - \frac{\mathcal{G}}{r} \right) \quad \text{или} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + n \frac{\mathcal{G}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

условие текучести Морра-Кулона в главном эффективном напряжений

$$\sigma_{\theta\theta}^f - N \sigma_{rr}^f = K. \quad (2.4)$$

Отметим, что в системе (2.1-2.4) m, k – пористость и коэффициент проницаемости пласта, ρ_f, w, p – истинные плотность, радиальная скорость и поровое давление жидкой фазы, ρ_s, v – истинные плотность, радиальная скорость твердой фазы, μ_0 – динамическая вязкость жидкости, $\sigma_{rr}^f, \sigma_{\theta\theta}^f$ – радиальное и кольцевое эффективные напряжения, α, φ – коэффициенты внутреннего трения и сцепления, Λ – скорость дилатансии,

$$N = (1 + \sin \varphi) / (1 - \sin \varphi),$$

$$K = 2v \sin \varphi / \alpha (1 - \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \alpha \frac{\sqrt{3(3-\Lambda^2)}}{3-\alpha\Lambda}, \\ n &= 1 + \frac{2\Lambda(3\Lambda + \sqrt{3(3-\Lambda^2)})}{3-4\Lambda^2}. \end{aligned}$$

При этом случай $\Lambda > 0$ характеризует разрыхление плотной матрицы пласта, $\Lambda < 0$ – уплотнение рыхлой матрицы, $\Lambda = 0$ – критическое состояние (несжимаемость среды).

В пластической зоне ($a(t) \leq r \leq R(t)$) система уравнений (2.1) – (2.4) относительно неизвестных $m, p, w, v, \sigma_{rr}^f, \sigma_{\theta\theta}^f$ замкнута. Здесь текущий радиус $a(t)$ скважины определяется в ходе решения задачи. Плотности фаз являются функциями переменных:

$$\rho_f = \rho_f(p), \rho_s = \rho_s(p, \sigma^f),$$

где $\sigma^f = \frac{1}{3} \sigma_{ij}^f \delta_{ij}$.

В упругой зоне $R_k > R(t) < \infty$ выполняются те же уравнения (2.1) – (2.2) с упругими параметрами пласта, которые замыкаются обобщенным законом Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{fe} &= 2G \left(\frac{\partial u_r^e}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) + \varepsilon p_e, \\ \sigma_{\theta\theta}^{fe} &= 2G \left(\frac{u_r^e}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) + \varepsilon p_e, \\ \sigma_{zz}^{fe} &= \nu (\sigma_{rr}^{fe} + \sigma_{\theta\theta}^{fe}) - (1-2\nu) \varepsilon p_e \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $2G$ – модуль сдвига; p_e - поровое давление в упругой зоне, E, ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона сухого пласта, ε - коэффициент сцементированности матрицы

цы пласта, e , u_r^e - объемная деформация и радиальные перемещения твердых частиц в упругой зоне,

$$\varepsilon = (1 - m_0) \beta_1 K,$$

$$e = \frac{\partial u_r^e}{\partial r} + \frac{u_r^e}{r},$$

$$G = (1 - m_0) E / 2(1 + \nu),$$

$$\nu^e = \frac{\partial u_r^e}{\partial t}, K = E / 3(1 - 2\nu).$$

В упругой области искомыми являются те же параметры: $m_e, p_e, w_e, u_r^e, \sigma_{rr}^{fe}, \sigma_{\theta\theta}^{fe}$, и система уравнений (2.1), (2.2), (2.5) для них также замкнута.

Начальные и граничные условия: Предположим, что при $t=0$

$$p = p_e = p_k,$$

$$m = m_0.$$

На стенке скважины при $r = a(t)$ радиальное эффективное напряжение равно нулю и задан дебит жидкой фазы скважины

$$\sigma_{rr}^f = \sigma_a^f = 0, \tag{2.6}$$

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{Q_f \mu_0}{2\pi k_a h}.$$

На упругопластической границе $r = R(t)$ должны выполняться условия равенства значений скорости смещений, радиального напряжения и давления:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^e, \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^e, p = p_e, \quad (2.7)$$

в бесконечности:

$$\sigma_{rr}^f = \sigma_k, m = m_0, p = p_k. \quad (2.8)$$

2.2. Решение задачи в пластической зоне $(a(t) < r < R(t))$.

Сперва определим радиальную скорость твердой фазы. Для этого (2.3) находим

$$v = c(t)r^{-n},$$

Скорость стенки скважины $\dot{a}(t)$ определяется скоростью твердых частиц, находящихся в ней. Отсюда находим $v(t)$, т.е.

$$v(a) = \frac{da}{dt}, \quad c(t) = \dot{a}a^n,$$

$$v = \left(\frac{a}{r}\right)^n \frac{da}{dt}.$$

Для определения пористости используем это соотношение. Уравнение сохранения массы твердой фазы (2.1) приводим к уравнению

$$\frac{\partial \ln((1-m)\rho_s r^{1-n})}{\partial a^{n+1}} + \frac{\partial \ln((1-m)\rho_s r^{1-n})}{\partial r^{n+1}} = 0,$$

общее решение которого имеет вид:

$$(1-m)\rho_s = f(r^{n+1} - a^{n+1})r^{n+1}.$$

Используя начальные условия

$$a = a_0,$$

$$m = m_0,$$

$$\rho_s = \rho_s^0$$

получаем

$$f(r, a) = (1-m_0)\rho_s^0 (a_0^{n+1} + r^{n+1} - a^{n+1})^{\frac{1-n}{1+n}}.$$

Тогда решение имеет вид

$$(1-m)\rho_s = (1-m_0)\rho_s^0 \left[1 + \left(\frac{a_0}{r} \right)^{n+1} - \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right]^{\frac{1-n}{1+n}}. \quad (2.9)$$

Отсюда, в частности, следует, что если пренебречь деформацией твердой фазы ($\rho_s = \rho_s^0$), то деформирование порового пространства происходит из-за дилатансионного течения породы

$$m = 1 - (1-m_0) \left[1 + \left(\frac{a_0}{r} \right)^{n+1} - \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right]^{\frac{1-n}{1+n}}. \quad (2.10)$$

При этом пористость на стенке скважины

$$m_a = 1 - (1-m_0) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1-n}. \quad (2.11)$$

Полученные результаты позволяют определить поровое давление.

Отметим, что зависимость коэффициента проницаемости от пористости принято представлять в виде (2.1, 2.7):

$$k = k_0 (m/m_0)^l, \quad (2.12)$$

где $l = \frac{\alpha_k}{\alpha_m},$

α_k, α_m - коэффициенты изменения проницаемости и пористости. Подставляем теперь второе уравнение (2.2) и формулы (2.10) (2.12) в уравнение сохранения массы жидкости (2.1) и предполагаем, что жидкость несжимаемая. После интегрирования этого уравнения по r получаем:

$$\begin{aligned}
 p = & -\bar{Q}_f \int_{x_0}^{\bar{R}} \frac{dx}{x \left\{ 1 - (1 - m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1 - y^{n+1}) \right]^{n_1} \right\}^l} + \\
 & + \bar{Q}_s \left(\frac{1}{1 - m_0} \int_{x_0}^{\bar{R}} \frac{dx}{x^n \left\{ 1 - (1 - m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1 - y^{n+1}) \right]^{n_1} \right\}^{l-1}} + \right. \\
 & \left. + (1 - n) \int_{x_0}^{\bar{R}} \frac{\int_y^x \left[1 + z^{-n-1} (1 - y^{n+1}) \right]^{\frac{-2n}{n+1}} z^{-n} dz}{x \left\{ 1 - (1 - m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1 - y^{n+1}) \right]^{n_1} \right\}^l} dx \right) + p_e(\bar{R}), \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

где $p_e(\bar{R})$ – значение порового давления на упругопластической границе $\bar{R}(t)$,

$$Q_s(t) = -2\pi a h (1 - m_a) \nu(a),$$

$$Q_f(t) = -2\pi a h m_a w(a),$$

$$\bar{Q}_s(t) = \frac{\mu_0 m_0^l Q_s(t)}{2\pi h k_0},$$

$$\bar{Q}_f(t) = \frac{\mu_0 m_0^l Q_f(t)}{2\pi h k_0},$$

$$\bar{R} = \frac{R}{a_0}, \quad y = \frac{a}{a_0},$$

$$x = \frac{r}{a_0}, \quad z = \frac{\rho}{a_0}, \tag{2.14}$$

$$n_1 = \frac{1 - n}{1 + n}$$

Используя предыдущие результаты по следующей схеме, определим компоненты эффективных напряжений.

Решая первое уравнение (2.2) и учитывая условие текучести (2.4) при граничном условии (2.6), находим эффективные напряжения в дилатансионно-пластической зоне

$$\sigma_{rr}^f = \left(\sigma_a^f + \frac{K}{N-1} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{N-1} + r^{N-1} \int_a^r \rho^{1-N} \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho - \frac{K}{N-1},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^f - N\sigma_{rr}^f = K$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^f = & x^{N-1} \left\{ \left(\sigma_a^f + \frac{K_n}{N-1} \right) y^{1-N} + \right. \\ & \left. + \bar{Q}_f(t) \int_y^x \frac{dx}{y x^N \left\{ 1 - (1-m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1-y^{n+1}) \right]^{m_1} \right\}^l} - \right. \\ & \left. - \bar{Q}_s(t) \left(\frac{1}{1-m_0} \int_y^x \frac{dx}{y x^{N+n-1} \left\{ 1 - (1-m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1-y^{n+1}) \right]^{m_1} \right\}^{l-1}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1-n) \int_y^x \frac{\int_z^y \left[1 + z^{-n-1} (1-y^{n+1}) \right]^{\frac{2n}{n+1}} z^{-n} dz}{y x^N \left\{ 1 - (1-m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1-y^{n+1}) \right]^{m_1} \right\}^l} dx \right) \right\} - \frac{K_n}{N-1}, \quad (2.15) \end{aligned}$$

Таким образом, получены формулы для ν , m , p , σ_{rr}^f и $\sigma_{\theta\theta}^f$, которые зависят от параметров $a(t)$, $R(t)$, $p(R)$.

Скорость w находим из закона фильтрации (2.2), где

$$v = \dot{a}(a/r)^n.$$

2.3. Решение задачи в упругой зоне $[r \leq R(t) \leq \infty]$.

Подставляя (2.5) в первое уравнение (2.2), получаем уравнение для определения u_r^e

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r^e)}{\partial r} \right) - \frac{1-\varepsilon}{2G} \frac{\partial p_e}{\partial r} = 0. \quad (2.16)$$

решение которого находим

$$u_r^e = c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{s}{r} \int_R^r \rho p_e d\rho, \quad (2.17)$$

где $s = (1-2\nu)(1-\varepsilon)/2G(1-\nu)$; c_1, c_2 – параметры интегрирования.

Определим радиальное эффективное напряжение:

$$\sigma_{rr}^{fe} = 2G \left(\frac{c_1}{1-\nu} - \frac{c_2}{r^2} - \frac{s}{r^2} \int_R^{R_k} \rho p_e d\rho - \frac{s}{r^2} \int_{R_k}^{\infty} \rho p_e d\rho \right) + p_e,$$

Учитывая, что $p_e = p_k = const$ при $r \in [R_k, \infty)$ находим:

$$c_1 = \frac{1-2\nu}{2G} [\sigma_k^f - (1-Gs)p_k],$$

$$c_2 = -\frac{R^2}{2G} [\sigma_{rr}^f(R) - p_e(R) - \sigma_k^f + (1-Gs)p_k]$$

Из (2.5) и (2.17) при граничных условиях (2.7), (2.8) определяем напряженно-деформированное состояние пласта в упругой зоне при поддержании постоянного давления на контуре питания R_k :

$$\begin{aligned}
 u_r^e &= \frac{1-2\nu}{2G} \left[\sigma_k^f - (1-Gs) p_k \right] r - \frac{1}{2G} \times \\
 &\times \left[\sigma_{rr}^f(R) - p_e(R) - \sigma_k^f + (1-Gs) p_k \right] \frac{R^2}{r} + \frac{s}{r} \int_R^r \rho p_e d\rho, \\
 \sigma_{rr}^{fe} &= \sigma_k^f - (1-Gs) p_k - \left[\sigma_k^f - (1-Gs) p_k - \sigma_{rr}^f(R) + p_e(R) \right] \times \\
 &\times \frac{R^2}{r^2} - \frac{2Gs}{r^2} \int_R^r \rho p_e d\rho + p_e, \\
 \sigma_{\theta\theta}^{fe} &= \sigma_k^f - (1-Gs) p_k + \left[\sigma_k^f - (1-Gs) p_k - \sigma_{rr}^f(R) + p_e(R) \right] \times \\
 &\times \frac{R^2}{r^2} + \frac{2Gs}{r^2} \int_R^r \rho p_e d\rho + (1-2Gs) p_e, \tag{2.17} \\
 \sigma_{zz}^{fe} &= 2\nu \left[\sigma_k^f + (1-Gs)(p_e - p_k) \right] + (1-2\nu) \varepsilon p_e.
 \end{aligned}$$

Эффективные напряжения (2.18) должны удовлетворять с внутренней стороны упругопластической границы усло-

вию текучести (2.4). Отсюда имеем

$$\sigma_{rr}^f(R) = \frac{2}{N_e + 1} \left[\sigma_k^f - (1 - Gs)(p_k - p_e(R)) - \frac{K_e}{2} \right], \quad (2.18)$$

где N_e, K_e соответствуют состоянию $\Lambda = 0$.

В упругой области объемная деформация и среднее напряжение пласта определяются с помощью формул (2.17)

$$e = sp_e + \frac{1-2\nu}{G} [\sigma_k^f - (1-Gs)p_k],$$

$$\sigma^{fe} = \frac{2(1+\nu)}{3} [\sigma_k^f - (1-Gs)p_k] + [(1-m_0)Ks + \varepsilon]p_e. \quad (2.19)$$

При малых отклонениях параметров пласта от исходного состояния уравнения (2.1) линеаризуются

$$\frac{\partial m'}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial \sigma'^{fe}}{\partial t} - (1-m_0)\beta_1 \frac{\partial p'_e}{\partial t} - (1-m_0) \frac{\partial e'}{\partial t} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial m'}{\partial t} + \beta_2 m_0 \frac{\partial p'_e}{\partial t} + m_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rw'_e) = 0. \quad (2.21)$$

Здесь

$$m = m_0 + m',$$

$$e = e_0 + e', \quad p_e = p_k + p'_e \text{ и т.д.}$$

Подставляя (2.19) в уравнение неразрывности твердой фазы (2.20) и интегрируя его, получаем

$$m' = (1 - m_0)(1 - \beta_1 K)(\beta_1 + s)p'_e. \quad (2.22)$$

Уравнение неразрывности жидкой фазы (2.21) с помощью закона Дарси

$$\frac{k_0}{\mu_0} \frac{\partial p'}{\partial r} = -m_0(w'_e - v'_e),$$

$$v'_e = \frac{\partial u'_r}{\partial t}$$

и соотношения (2.22) приводится к виду

$$\frac{\partial p'_e}{\partial t} = \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_e}{k_0} r \frac{\partial p'_e}{\partial r} \right), \quad (2.23)$$

где

$$\chi = \frac{\chi_0}{a + b}, \quad \chi_0 = k_0(1 - m_0)(1 - \nu) \frac{E}{\mu_0},$$

$$b = (1 - \varepsilon)^2 (1 + \nu)(1 + 2\nu),$$

$$a = (1 - m_0)(1 - \nu)[(1 - m_0)(1 - \beta_1 K)\beta_1 + m_0\beta_2].$$

Таким образом, после нахождения из (2.23) p'_e полностью определяются напряженно-деформированные состояния пласта, пористости, коэффициент проницаемости, скорости твердой и жидкой фаз.

2.4. Определение интенсивности выноса твердой фазы породы пласта на стенке скважины.

Интенсивность выноса твердой породы пласта $\bar{Q}_s(t)$ на стенке скважины рассчитывается по (2.14) при учете (2.11)

$$y^n \frac{dy}{dt} = -\frac{\bar{Q}_s(t)k_0}{(1-m_0)m_0^l a_0^2 \mu_0}. \quad (2.24)$$

Если воспользоваться (2.13), (2.15), (2.17) и решением (2.23), то из граничных условий (2.7) получаем

$$2G(N_e + 1) \left(\frac{a}{r} \right)^n \frac{da}{dt} = \{K_e + 2[(1-\nu)N_e - \nu][\sigma_k^f - (1-Gs)p_k]\} \frac{dR}{dt} + (N_e + 2Gs - 1) \left[p_e(R, t) \frac{dR}{dt} + R \frac{\partial p_e(R, t)}{\partial t} \right], \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} & \bar{Q}_f(t) \int_y^{\bar{R}} \frac{dx}{x^N f^l(x, y)} - \bar{Q}_s(t) \left(\frac{1}{1-m_0} \int_y^{\bar{R}} \frac{dx}{x^{N+n-1} f^{l-1}(x, y)} + \right. \\ & \left. + (1-n) \int_y^{\bar{R}} \frac{\varphi(x, y) dx}{x^N f^l(x, y)} \right) + \\ & + \frac{2(1-Gs)}{N_e + 1} \bar{R}^{1-N} [p_k - p_e(R)] = \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$= \left[\frac{K}{N-1} + \frac{2}{N_e + 1} \left(\sigma_k^f - \frac{K_e}{2} \right) \right] \bar{R}^{1-N} - \left(\sigma_a^f + \frac{K}{N-1} \right) y^{1-N},$$

где

$$f(x, y) = 1 - (1 - m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1 - y^{n+1}) \right]^n,$$

$$\varphi(x, y) = \int_y^x \left[1 + z^{-n-1} (1 - y^{n+1}) \right]^{-\frac{2n}{n+1}} z^{-n} dz. \quad (2.27)$$

Динамика развития давления p на стенке скважины рассчитывается по формуле (2.13), т.е.

$$p_a = -\bar{Q}_f \int_y^{\bar{R}} \frac{dx}{x f^l(x, y)} + \quad (2.28)$$

$$+ \bar{Q}_s \left[\frac{1}{1 - m_0} \int_y^{\bar{R}} \frac{dx}{x^n f^{l-1}(x, y)} + (1 - n) \int_y^{\bar{R}} \frac{\varphi(x, y) dx}{x f^l(x, y)} \right] + p_e(\bar{R}).$$

Если в системе (2.24)-(2.26) заданы геометрические и гидродинамические параметры пласта и \bar{Q}_f , то она замкнута относительно неизвестных y , \bar{R} и \bar{Q}_s . Нахождение последних дает возможность вычислить p_a из (2.28). Если известно p_a , то требуется решить совместно систему интегродифференциальных уравнений (2.24) – (2.26), (2.28) относительно y , \bar{R} , \bar{Q}_s и \bar{Q}_f .

Рассмотрим частный случай. Пусть режим работы скважины таков, что в упругом пласте на контуре питания поддерживается постоянное давление (что, например, обеспечивается при разработке месторождения поддержанием давления). Тогда коэффициент продуктивности скважины

при длительной ее работе определяется из уравнения (2.23) ($k = k_0$)

$$p_k - p_e = -\frac{Q_f \mu_0}{2\pi k_0 h} \left(\ln \frac{r}{R_k} + 1,283e^{-5,784 \frac{\bar{\chi} t}{R_k^2}} \right). \quad (2.29)$$

Если начальное давление в пласте постоянное, то при «пуске» скважины с постоянным дебитом депрессия для малых t будет изменяться по формуле

$$p_k - p_e = -\frac{Q_f \mu_0}{2\pi k_0 h} \ln \sqrt{\frac{r^2}{2,25 \bar{\chi} t}}, \quad (2.30)$$

где $\bar{\chi} t \gg r^2$, а для больших t по формуле

$$p_k - p_e = -\frac{Q_f \mu_0}{2\pi k_0 h} \left(\ln \frac{r}{R_k} + 1,283e^{-5,784 \frac{\bar{\chi} t}{R_k^2}} \right) \quad (2.31)$$

Подставляя (2.29) в (2.25)-(2.28) и переходя к безразмерным величинам, при малых t получим

$$2G(N_e + 1)y^n \frac{dy}{dt} = \bar{R}^n \left\{ \left[K_e + 2((1-\nu)N_e - \nu)\sigma_k^f - \right. \right. \quad (2.32)$$

$$\left. -2(1+N_e)\left((1-\nu)(1-Gs) - \frac{1}{2}\right)p_k + \right. \\ \left. + A\left(1 + \ln \frac{R}{\sqrt{2,25 \bar{\chi} t}}\right)\right] \frac{dR}{dt} - \frac{A}{2} \cdot \frac{R}{t} \left. \right\},$$

$$\begin{aligned} & \bar{Q}_f \left(\int_y^R \frac{dx}{x^N f^l(x, y)} - B \bar{R}^{1-N} \ln \frac{\bar{R}}{\sqrt{2,25 \chi t}} \right) - \\ & - \bar{Q}_s \left(\frac{1}{1-m_0} \int_y^R \frac{dx}{x^{N+n-1} f^{l-1}(x, y)} - (1-n) \int_y^R \frac{\varphi(x, y) dx}{x^N f^l(x, y)} \right) = \\ & = \left[\frac{K}{N-1} + \frac{2}{N_e+1} \left(\sigma_k^f - \frac{K_e}{2} \right) \right] R^{1-N} - \left(\sigma_a^f + \frac{K}{n-1} \right) y^{1-N}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{Q}_f \left(\int_y^R \frac{dx}{x f^l(x, y)} - \frac{k_0}{k_e m_0^e} \ln \frac{\bar{R}}{\sqrt{2,25 \chi t}} \right) - \\ & - \bar{Q}_s \left(\frac{1}{1-m_0} \int_y^R \frac{dx}{x^n f^{l-1}(x, y)} + (1-n) \int_y^R \frac{\varphi(x, y) dx}{x f^l(x, y)} \right) = p_k - p_a, \end{aligned}$$

а при больших t

$$\begin{aligned} 2G(N_e+1)y^n \frac{dy}{dt} &= \bar{R}^n \left\{ \left[K_e + 2((1-\nu)N_e - \nu)\sigma_k^f - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2(1+N_e) \left((1-\nu)(1-Gs) - \frac{1}{2} \right) p_k + \right. \right. \\ & \left. \left. + A \left(1 + \ln \frac{\bar{R}}{R_k} + 1,283e^{-5,784 \frac{\bar{z}t}{R_k^2}} \right) \right] \frac{d\bar{R}}{dt} - \frac{7,429A}{R_k^2} e^{-5,784 \frac{\bar{z}t}{R_k^2}} \bar{R} \right\}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} & \bar{Q}_f \left[\int_y^{\bar{R}} \frac{dx}{x^N f^l(x, y)} - B \bar{R}^{1-N} \ln \left(\frac{\bar{R}}{R_k} + 1, 283 e^{-5,784 \frac{\bar{\chi}}{R_k^2}} \right) \right] - \\ & \bar{Q}_s \left(\frac{1}{1-m_0} \int_y^{\bar{R}} \frac{dx}{x^{N+n-1} f^{l-1}(x, y)} + (1-n) \int_y^{\bar{R}} \frac{\varphi(x, y) dx}{x^N f^l(x, y)} \right) = \\ & = \left[\frac{K}{N-1} + \frac{2}{N_e+1} \left(\sigma_k^f - \frac{K_l}{2} \right) \right] \bar{R}^{1-N} - \left(\sigma_a^f + \frac{K}{N-1} \right) y^{1-n}; \\ & \bar{Q}_f \left[\int_y^R \frac{dx}{x f^l(x, y)} - \frac{k_0}{k_e m_o^l} \left(\ln \frac{\bar{R}}{R_k} + 1, 283 e^{-5,784 \frac{\bar{\chi}}{R_k^2}} \right) \right] - \\ & - \bar{Q}_s \left[\frac{1}{1-m_0} \int_y^R \frac{dx}{x^n f^{l-1}(x, y)} + (1-n) \int_y^R \frac{\varphi(x, y) dx}{x f^l(x, y)} \right] = p_k - p_a, \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{\bar{Q}_f k_0 (N_l + 2Gs - 1)}{k_e m_o^l},$$

$$B = \frac{2(1-Gs)k_0}{(N_l + 1)k_e m_o^l},$$

$$\bar{\chi} = \frac{\bar{\chi}}{a_0^2},$$

$$\Delta p = p_k - p_a .$$

Проведены численные расчеты замкнутой системы интегродифференциальных уравнений (2.24), (2.31) - (2.33), связывающей интенсивность объема выноса твердой породы \overline{Q}_s с радиусами пластической зоны a и R , дебитом жидкости \overline{Q}_f и перепадом давления Δp . Расчеты получены при следующих входных данных:

$$k_0 = 6 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2, \quad k_e = 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2,$$

$$m_0 = 0.2, \quad K = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$K_e = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad p_k = 1.5 \cdot 10^7 \text{ Па},$$

$$\sigma_k^f = -2.5 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad n = 0.8; 1.5; 2; \quad l = 4, \quad N = N_e = 3,$$

$$a_0 = (0.12 - 0.15) \text{ м}, \quad R_k = 200 \text{ м}, \quad R_0 = 0.12 \text{ м},$$

$$\overline{\chi} = 40 \text{ сек}^{-1}, \quad G_s = 0.27, \quad \nu = 0.25, \quad E = 4.02 \cdot 10^9 \text{ Па},$$

$$\overline{Q}_f = (100 \div 1000) \text{ Па}.$$

При различных значениях \overline{Q}_f , для $n=1,5$, полученные данные \overline{Q}_s указаны в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

Интенсивность объема выноса твердой породы \bar{Q}_s

t (час)	\bar{Q}_s		
	$\bar{Q}_f = 200$ Па,	$\bar{Q}_f = 300$ Па,	$\bar{Q}_f = 400$ Па,
1	1,150453	2,496905	4,843087
5	0,238364	0,535492	1,112667
10	0,121145	0,276495	0,596275
15	0,081554	0,187932	0,415409
20	0,061594	0,142933	0,322034
25	0,049545	0,11561	0,264637

При $n > 1$ существуют критические значения \bar{Q}_{fk} , в случае $\bar{Q}_f < \bar{Q}_{fk}$ объем выноса твердой массы в зависимости от времени, быстро уменьшаясь, асимптотически стремится к нулю (рис. 2.1).

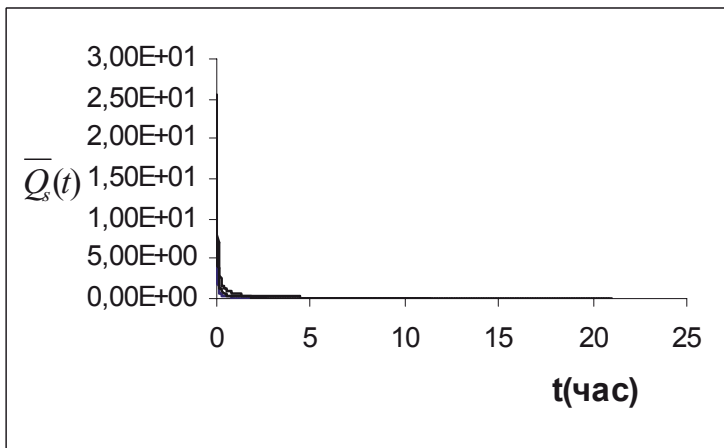


Рис. 2.1. Интенсивность объема выноса твердой породы \bar{Q}_s

В таблице 2.2. даны результаты изменения $R(t)$ и $\Delta p(t)$ при трех значениях \overline{Q}_f и различных значениях времени.

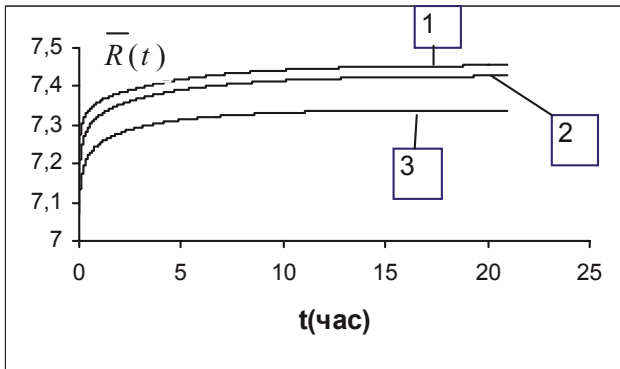
Таблица 2.2.

Результаты изменения радиуса упруго-пластической границы $R(t)$ и давления на стенке скважины $\Delta p(t)$ в зависимости от времени

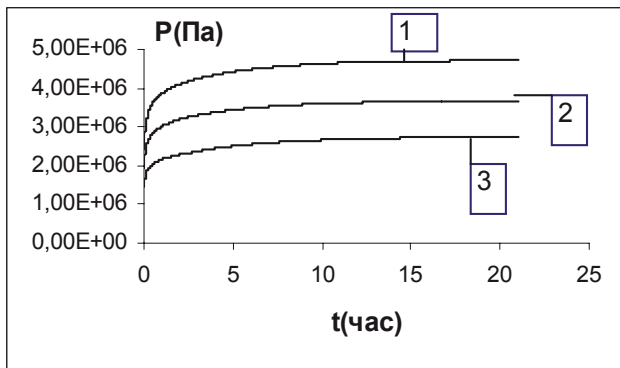
t (час)	$R(t)$			$\Delta p(t)$		
	1	2	3	1	2	3
0,05	7,27	7,20	7,12	1747369,00	2394282,00	3035677,00
1,00	7,36	7,32	7,25	2159042,00	3010101,00	3853572,00
2,00	7,38	7,35	7,28	2282965,00	3195428,00	4099426,00
3,00	7,41	7,37	7,29	2898784,00	3303845,00	4243173,00
4,00	7,43	7,38	7,31	3084111,00	3380773,00	4345126,00
5,00	7,44	7,39	7,31	3192528,00	3439893,00	4423450,00
6,00	7,45	7,40	7,32	3269456,00	3485432,00	4483765,00
7,00	7,46	7,40	7,32	3328576,00	3522413,00	4532732,00
8,00	7,46	7,41	7,33	3374115,00	3552442,00	4572486,00
9,00	7,47	7,41	7,33	3411096,00	3576828,00	4604763,00
10,00	7,47	7,42	7,33	3441125,00	3596630,00	4630968,00
11,00	7,47	7,42	7,33	3465511,00	3612710,00	4652245,00
12,00	7,48	7,42	7,33	3485313,00	3625767,00	4668325,00
13,00	7,48	7,42	7,33	3501393,00	3636371,00	4681382,00
14,00	7,48	7,42	7,33	3514450,00	3644981,00	4691986,00
15,00	7,48	7,42	7,33	3525054,00	3651972,00	4700596,00
16,00	7,48	7,42	7,33	3533664,00	3657650,00	4707587,00
17,00	7,48	7,43	7,33	3540655,00	3662260,00	4713265,00
18,00	7,48	7,43	7,33	3546333,00	3666003,00	4717875,00
19,00	7,48	7,43	7,33	3550943,00	3669043,00	4721618,00
20,00	7,49	7,43	7,33	3554686,00	3671512,00	4724658,00

Здесь 1 обозначает $\overline{Q}_f = 200$ Па,
 2 обозначает $\overline{Q}_f = 300$ Па,
 3 обозначает $\overline{Q}_f = 400$ Па.

На рисунке 2.2 (а,б) кривые 1 соответствует значению $\bar{Q}_f = 200$ Па, кривая 2 – $\bar{Q}_f = 300$ Па, кривая 3 – $\bar{Q}_f = 400$ Па при $n = 1,5$.



а)



б)

Рис. 2.2 (а,б). Изменение радиуса упругопластической границы (а) и давления на стенке скважины (б) в зависимости от времени

В этом случае фильтрация происходит в процессе разуплотнения породы пласта и расширения пластической зоны вокруг скважины.

Однако, изначально при плотной упаковке породы пласта, когда вынос породы начинается после достижения \bar{Q}_f значения \bar{Q}_{fk} и n больше единицы, происходит разрыхление породы в окрестности скважины и быстрый рост \bar{Q}_s .

Для указанных данных при $n = 1.5$, критическое значение $\bar{Q}_f \approx 450 \text{ Па}$. С уменьшением коэффициентов проницаемости критическое значение \bar{Q}_{fk} увеличивается и при $k_0 = 3 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$, $k_e = 10^{-13} \text{ м}^2$, \bar{Q}_{fk} становится равным $\approx 10^3 \text{ Па}$.

Отметим, что продолжительность перепада давления, интенсивность выноса породы $\bar{Q}_s(t)$, расширение пластической зоны во времени зависят от режима работы скважины. Поскольку при заданном распределении давления в упругой зоне процесс фильтрации со временем переходит в стационарное состояние, то $\bar{Q}_s(t)$, $R(t)$ и $\Delta p(t)$ тоже переходят ($\Delta p(t)$ равно $p(t)$) в это состояние (рис. 2.2).

Связь между \bar{Q}_s и \bar{Q}_f показана на рис. 2.3. В случае $n < 1$ пористость пласта сначала велика, но при фильтрации происходит уплотнение разрыхленной породы, приводящее к уменьшению пористости и коэффициента проницаемости, а также к сужению пластической зоны.

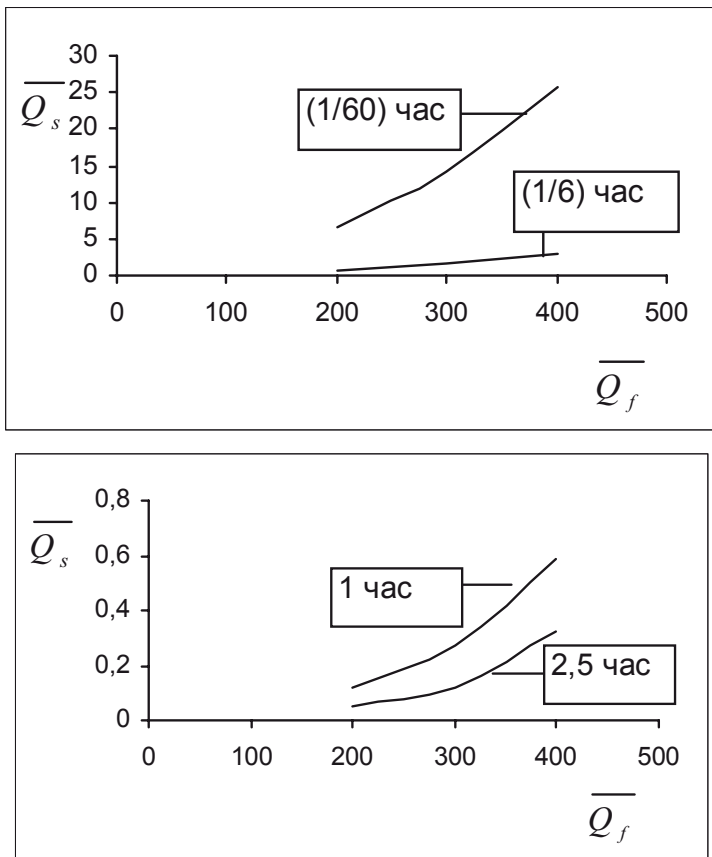


Рис. 2.3. Соотношение дебита скважины \bar{Q}_f и интенсивности выноса твердых фрагментов \bar{Q}_s для разных периодов

2.5. Автомодельное решение задачи при локализации пластической зоны в ближней окрестности забоя скважины.

Приведем еще одно решение этой задачи, предположив заданный рост контура питания. Пусть пластическая зона локализована вблизи забоя центральной скважины, причем дебиты нефти и породы $r=a(t)$ определяются выражениями

$$Q_f = -2\pi ahmw = const, \tag{2.34}$$

$$Q_s = -2\pi ah(1-m)v = const.$$

Пусть на бесконечности $\frac{r}{a} \rightarrow \infty$ выполняются условия покоя, а все параметры пласта равны начальным значениям, независимым от координат

$$p_e = p_0,$$

$$\sigma_{rr}^{f(e)} = -(\Gamma - p_0), \tag{2.35}$$

$$m = m_e^0$$

где Γ – полное горное давление.

При численной реализации эти условия зададим при достаточно большом радиусе, соответствующем реальному радиусу контура питания, растущего пропорционально \sqrt{t} . Считаем, что интенсивность отбора жидкости соответствует реализации плоской деформации матрицы пласта, а радиус

упругопластической зоны $R(t)$ и радиус скважины $a(t)$ будут перемещаться во внешнюю область скважины. При такой постановке необходимо решать задачу с учетом зависимости от времени, т.е.

$$\sigma_{rr}^f = 0 \Rightarrow p = p_a$$

при

$$r = a(t).$$

Считаем, что интенсивность отбора жидкости соответствует реализации плоской деформации матрицы пласта, а радиус упруго-пластической зоны $R(t)$ и радиус скважины $a(t)$ будут перемещаться во внешнюю область скважины.

На границе $R(t)$ должны быть выполнены условия равенства значений давлений и радиальных напряжений, а также скоростей твердых и жидких частиц, относящихся к внутренней пластической и внешней упругой сторонам

$$P_e = P_n,$$

$$\sigma_{rr}^{f(e)} = \sigma_{rr}^{f(n)}, \tag{2.36}$$

$$v_e = v_n,$$

$$w_e = w_n.$$

В упругой области уравнения сохранения масс и баланс сил, действующих в жидкой и твердой фазах, описываются соотношениями (2.1), (2.2).

Обобщенный закон Гука (2.5) для плоской деформа-

ции запишем в виде:

$$\sigma_{rr}^{f(e)} = (K + G) \frac{\partial u_r^e}{\partial r} + (K - G) \frac{\partial u_r^e}{r} + \varepsilon p_e, \quad (2.37)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{f(e)} = (K - G) \frac{\partial u_r^e}{\partial r} + (K + G) \frac{\partial u_r^e}{\partial r} + \varepsilon p_e.$$

Введем новые переменные

$$W = w\sqrt{t}, \quad V = \nu\sqrt{t},$$

$$U = \frac{u_r^e}{\sqrt{t}}, \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{t}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2t} \xi \frac{d}{d\xi}, \quad (2.38)$$

$$V = \frac{1}{2} \xi \frac{dU}{d\xi} + \frac{1}{2} U.$$

Если пренебречь сжимаемостью фаз, то система уравнений (2.1), (2.2) и (2.37) для упругой области в авто-модельной переменной примет вид

$$\frac{dm_e}{d\xi} = \frac{\mu_0(1-\varepsilon)(m_e-1)m_e}{k_e(K+G)(\xi-2V_e)}\xi(W_e-V_e),$$

$$\frac{dW_e}{d\xi} = \frac{\mu_0(1-\varepsilon)(m_e-1)\xi(\xi-2W_e)}{2k_e(K+G)(\xi-2W_e)}(W_e-V_e) - \frac{W_e}{\xi}, \quad (2.39)$$

$$\frac{dV_e}{d\xi} = \frac{\mu_0(1-\varepsilon)\xi}{2k_e(K+G)}m_e(W_e-V_e) - \frac{V_e}{\xi},$$

$$\frac{dp_e}{d\xi} = -\frac{\mu_0}{k_e}m_e(W_e-V_e) \quad (2.40)$$

$$\frac{d\sigma_{rr}^{f(e)}}{d\xi} = 4G\frac{V_e}{\xi^2} - \frac{\mu_0}{k_e}m_e(W_e-V_e). \quad (2.41)$$

Внутри пластической зоны уравнение (2.3) и уравнение равновесия твердого скелета (2.2) с помощью соотношения (2.5) в автомодельной переменной имеют следующие формы:

$$\frac{dV_n}{d\xi} = -n\frac{V_n}{\xi},$$

$$\frac{d\sigma_{rr}^{(n)}}{d\xi} = -\frac{\sigma_{rr}^{f(n)}(1-N_n)+K_n}{\xi} - \frac{\mu_0 m_n}{k_n}(W_n-V_n) \quad (2.42)$$

Закон фильтрации (2.40) относительно движущейся матрицы и уравнения неразрывности фаз (2.39) не меняют своего вида.

На растущей упругопластической границе ξ_R упру-

гое эффективное напряжение должно удовлетворять условию текучести (2.4). Отсюда

$$\sigma_{rr}^{f(t)} = \frac{1}{N_e - 1} \left(4G \frac{V_e}{\xi} + K_e \right), \quad (2.43)$$

Рассматриваемая задача решалась численно методом Рунге-Кутты [8]. После определения p_e из (2.40) последовательно находились $V_e, m_e, W_e, \sigma_{rr}^{f(e)}$ и $\sigma_{\theta\theta}^{f(e)}$ в упругой области. Потом аналогично была решена задача в пластической зоне: $p_n, V_n, m_n, W_n, \sigma_{rr}^{f(n)}$ и $\sigma_{\theta\theta}^{f(n)}$.

Решение соответствующей задачи имеет физический смысл только при $a(t) < a_0$, где a_0 - реальный радиус скважины. Дебиты жидкости и песка определялись по скоростям фильтрации и смещения разрушенной матрицы в пластической зоне, расширяющейся в результате дилатансионного разрыхления. Для простоты расчетов принято, что из-за произошедшего разрушения значение сцепления K_e равно сцеплению в пластической зоне.

Зависимости искомых параметров от безразмерной переменной $z = \frac{\xi}{\xi_a}$ на логарифмической координате изображены на рис. 2.4 (а, б).

Расчет проведен на основании следующих данных:

$$\begin{aligned} m_0 &= 0.3; k_0 = 10^{-13} \text{ м}^2, \\ p_0 &= 5 \text{ МПа}; p_R = 16 \text{ МПа}; G_f = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}; G_s = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}; \\ K_e &= K_n = 2.4 \text{ МПа}; \\ \sigma_{rr0}^f &= -20 \text{ МПа}; \beta_1 = 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}; \mu = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}; \\ v &= 0.25, n = 1.1, N_e = N_n = 3. \end{aligned}$$

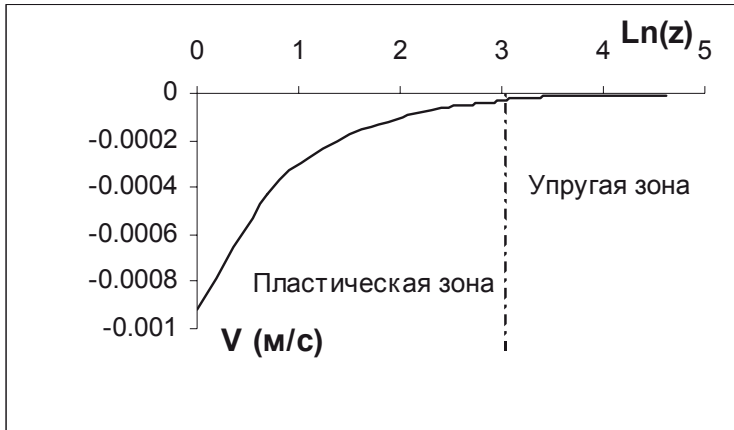


Рис. 2.4 (а). Зависимость распределения скоростей твердых фрагментов пласта от параметра $z = \frac{\xi}{\xi_a}$.

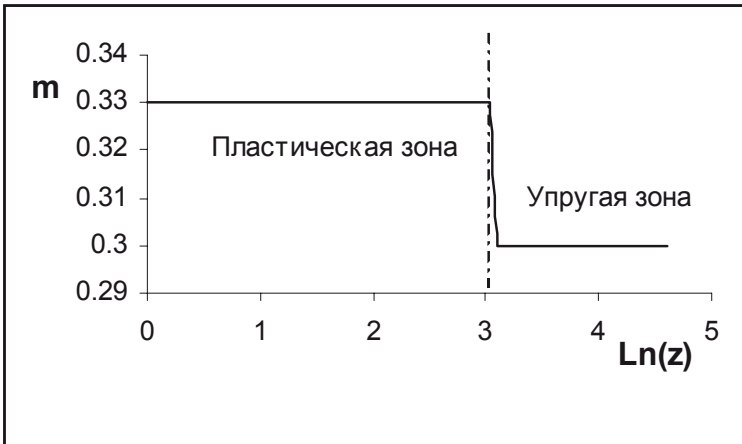


Рис. 2.4 (б). Зависимость пористости пласта от безразмерного параметра $z = \frac{\xi}{\xi_a}$.

По мере приближения к скважине пористость (рис. 2.4 б)), в упругой зоне, незначительно уменьшаясь, скачком переходит упругопластическую границу, а в пластической зоне значение пористости пласта, увеличенное в результате разрыхления породы, уменьшается за счет сжимаемости матрицы при перепаде порового давления.

Распределение скорости жидкой и твердой фаз дано на рис. 2.4 а). В этой координате распределение давления подчиняется почти линейному закону.

$$\bar{\sigma}_{rr}^{ff} = \frac{\bar{\sigma}_{rr}^f}{K_e},$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{ff} = \frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta}^f}{K_e}.$$

Абсолютное значение безразмерного радиального эффективного напряжения $\bar{\sigma}_{rr}^{ff}$ непрерывно увеличивается, однако, кольцевое напряжение $\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{ff}$ на границе скачком переходит в упругую зону.

Глава III.
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ
ДИЛАТАНСИИ ПОРОДЫ НА ПРОЦЕСС
ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ
ГАЗОВОЙ СКВАЖИНЫ

Твердые фрагменты слабосцементированного пласта могут проникать в скважину без фильтрации и при наличии фильтрационного потока. На практике при разработке нефтегазовых месторождений это явление обычно объясняется воздействием гидродинамической силы на структурные изменения скелета пласта. Если эта сила превосходит силы сцепления между частицами, тогда разрушаются структурные связи скелета пласта и происходит вымывание (суффузия) [17, 27, 73].

С другой стороны, в слабосцементированных газовых месторождениях перепад пластового давления больше, чем в нефтяных. При этом газ сильно сжимается вблизи эксплуатационной скважины и возникновение неустойчивой зоны приводит к интенсивному выносу твердых фрагментов пласта в скважину. Поэтому представляет интерес изучение развития упругопластической границы и определение гидродинамических параметров пласта при первоначальном понижении пластового давления в бесконечном пласте для случая работы скважины с постоянным дебитом.

3.1. Неустановившаяся осесимметричная фильтрация идеального газа к мгновенно включенной с постоянным дебитом скважине

Постановка задачи.

Рассмотрим неустановившуюся осесимметричную фильтрацию баротронного газа к мгновенно включенной с постоянным дебитом скважине. Предполагается, что пластическая область локализована в забое скважины, а процесс фильтрации с выносом твердых фрагментов вызывается линейным стоком. Условия интенсивности линейного стока для каждой фазы будем задавать на достаточно малом радиусе $a(t)$ условной скважины $a(t) < a_0$

$$\begin{aligned} Q_f &= -2\pi a h m w = const, \\ Q_s &= -2\pi a h (1 - m) v = const. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для нахождения радиуса условной скважины будем использовать равенство нулю радиального эффективного напряжения на ее забое

$$\sigma_{rr}^f = 0 \rightarrow p = p_a, \quad r = a(t). \quad (3.2)$$

На бесконечности все параметры пласта равны первоначальным значениям

$$\begin{aligned} p &= p_0, \\ \sigma_{rr}^{f(0)} &= -(\Gamma - p_0), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$m = m_e^0$$

Дискретизация этих граничных условий осуществляется на достаточно большом радиусе, в котором радиус возмущенной области (расширение контура питания) растет пропорционально \sqrt{t} [19].

$$R(t) = \sqrt{2\eta t}, \quad \eta = \frac{k_e}{\mu\beta_*}, \quad (3.4)$$

где k_e - абсолютный коэффициент проницаемости упругого пласта,

μ - динамическая вязкость газа,

β_* - коэффициент упругоёмкости пласта.

Пусть в неограниченном пласте постоянной толщины h в момент $t = 0$ пущена добывающая газовая скважина и возникающая при $t > 0$ упруго-пластическая область с радиусом $b(t)$, а также радиус скважины $a(t)$ перемещаются на внешнюю сторону.

Запишем уравнения баланса сил для газовой и твердой фаз во внутренней пластической области ($a(t) \leq r \leq b(t)$) пласта [78, 75].

$$\frac{\partial p_n}{\partial r} = -\frac{\mu}{k_n} m_n (w_n - v_n), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{f(n)}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^{f(n)} - \sigma_{\theta\theta}^{f(n)}}{r} - \frac{\partial p_n}{\partial r} = 0,$$

уравнения сохранения масс

$$\frac{\partial m_n \rho_f}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r m_n \rho_f w_n) = 0,$$

$$\frac{\partial(1-m_n)\rho_s}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(1-m_n)\rho_s v_s) = 0, \quad (3.6)$$

кинематическое соотношение дилатансии

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + n \frac{v_n}{r} = 0 \quad (3.7)$$

и условие пластического течения матрицы пласта

$$N\sigma_{rr}^{f(n)} - \sigma_{\theta\theta}^{f(n)} = K_n. \quad (3.8)$$

Во внешней упругой области $b(t) \leq r \leq R(t)$ выполняются те же уравнения (3.5) и (3.6), но кинематическое условие дилатансии (3.7) и условие пластического течения заменяются обобщенным законом Гука [73].

$$\sigma_{rr}^{f(e)} = (K + G) \frac{\partial u_e}{\partial r} + (K - G) \frac{u_e}{r} + \varepsilon p_e, \quad (3.9)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{f(e)} = (K - G) \frac{\partial u_e}{\partial r} + (K + G) \frac{u_e}{r} + \varepsilon p_e.$$

Здесь индексы «*n*» и «*e*» относятся, соответственно, к пластической и упругой зоне;

w, *v* – истинные скорости газа и твердой частицы;

p – пластовое давление;

σ_{ij}^f – эффективные напряжения;

m, *k* – пористость и коэффициент проницаемости пласта;

G, *K* – модуль сдвига и коэффициент объемного сжа-

тия сухого пористого пласта;

$\varepsilon = \beta_1 K$ - коэффициент сжимаемости матрицы пласта;

u - радиальное смещение твердых частиц;

$$n = 1 + \frac{2\Lambda(3\Lambda + \sqrt{3(3 - \Lambda^2)})}{(3 - 4\Lambda^2)};$$

где Λ - скорость дилатансии, которая при $\Lambda > 0$ характеризует разрыхление плотной матрицы пласта, при $\Lambda < 0$ - уплотнение рыхлой матрицы, а при $\Lambda = 0$ несжимаемость породы,

$$K_n = \frac{2Y_n \sin \varphi}{\alpha(1 - \sin \varphi)},$$

$$N_n = \frac{(1 + \sin \varphi)}{(1 - \sin \varphi)},$$

где α, Y_n - коэффициенты внутреннего трения и сцепления, φ - угол внутреннего трения.

Считаем, что газ является баротропным, а плотность твердой фазы постоянна

$$\rho_f = \frac{p_{at}}{p} p, \tag{3.10}$$

$$\rho_s = const.$$

На границе $b(t)$, разделяющей пластическую область от упругой, должны быть выполнены условия непрерывно-

сти давлений, радиальных напряжений, скоростей твердых и газовых частиц

$$P_n = P_e,$$

$$\sigma_{rr}^{f(n)} = \sigma_{rr}^{f(e)}, \tag{3.11}$$

$$v_n = v_e,$$

$$w_n = w_e$$

Присутствующее в вышеуказанных уравнениях и условиях напряжение и давление включают в себя все действующее напряжение и давление в пласте, т.е. начальное и генерируемое при пуске скважины. Если упругое эффективное напряжение на некотором радиусе удовлетворяет условию Мора-Кулона (3.8), то этот радиус $b(t)$ будет внешней границей пластической области.

3.2. Автомодельное решение

Осесимметричная задача (3.1)-(3.10) является автомодельной и поэтому введем автомодельную переменную $\xi = \frac{r}{\sqrt{t}}$ и новые функции $W = \frac{w}{t}$, $V = \frac{v}{t}$, $U = \frac{u}{t}$. Тогда искомые функции удовлетворяют обыкновенные дифференциальные уравнения. Если подставить (3.9) во второе уравнение (3.5) и в (3.6), то уравнения (3.5) и (3.6) в упругой области $\xi_b \leq \xi \leq \xi_R$ в автомодельной переменной примут вид [28]:

$$\frac{dp_e}{d\xi} = -\frac{\mu}{k_e} m_e (W_e - V_e), \quad (3.12)$$

$$\frac{dV_e}{d\xi} = \frac{\mu(1-\varepsilon)}{2k_e(K+G)} \xi m_e (W_e - V_e) - \frac{V_e}{\xi}, \quad (3.13)$$

$$\frac{dW_e}{d\xi} = \frac{\xi - 2W_e}{2m_e p_e} \frac{d(m_e p_e)}{d\xi} - \frac{W_e}{\xi}, \quad (3.14)$$

$$\frac{dm_e}{d\xi} = \frac{\mu(1-\varepsilon)(m_e - 1)}{k_e(K+G)(\xi - 2V_e)} \xi m_e (W_e - V_e) \quad (3.15)$$

Дифференцируя первое уравнение (3.9) по t с учетом закона фильтрации газа (3.5), переходим к новым переменным:

$$\frac{d\sigma_{rr}^{f(e)}}{d\xi} = 4G \frac{V_e}{\xi^2} - \frac{\mu}{k_e} m_e (W_e - V_e), \quad (3.16)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{2t} \xi \frac{d}{d\xi},$$

$$V_e = -\frac{1}{2} \xi \frac{dU}{d\xi} + \frac{1}{2} U.$$

В пластической зоне ($\xi_a \leq \xi \leq \xi_b$) уравнения состояния (3.10) и движения газа (3.12), неразрывности фаз (3.14), (3.15), условие текучести (3.8) при новых переменных не изменяют свою форму, а уравнения движения матрицы (3.5) с помощью (3.8) и (3.7) принимают вид

$$\frac{d\sigma_{rr}^{f(n)}}{d\xi} = -\frac{\sigma_{rr}^{f(n)}(1-N_n)+K_n}{\xi} - \frac{\mu}{k_n}m_n(W_n-V_n), \quad (3.17)$$

$$\frac{dV_n}{d\xi} = -n\frac{V_n}{\xi}. \quad (3.18)$$

Упругопластическая граница определяется из условия текучести (3.8), которое выражается упругим эффективным напряжением $\sigma_{rr}^{f(e)}$ и скоростью V_e :

$$\frac{d\sigma_{rr}^{f(e)}}{d\xi} = \frac{1}{N_e-1} \left(4G\frac{V_e}{\xi} + K_n \right). \quad (3.19)$$

В автомодельной постановке задача приводится к стационарному решению в пространстве ξ , граничные условия (3.2), (3.3), (3.11) сохраняют свою форму, а (3.1) запишем в виде:

$$Q_f = -2\pi h \xi_a m_a W_a = const, \quad (3.20)$$

$$Q_s = -2\pi h \xi_a (1-m_a) V_a = const.$$

В переменной ξ начальные условия и условия в бесконечности $\xi \rightarrow \infty$ совпадают. В упругой $\xi_b \leq \xi \leq \xi_R$ ($p_e, W_e, V_e, m_e, \sigma_{rr}^{f(e)}$) (3.12)-(3.16) и пластической $\xi_a \leq \xi \leq \xi_b$ ($p_n, W_n, V_n, m_n, \sigma_{rr}^{f(n)}$) (3.12), (3.14), (3.15), (3.17), (3.18) областях эти системы уравнений замкнуты относительно искомым переменных. После определения этих переменных из второго уравнения (3.9), (3.8) и (3.10) соответ-

ственно находятся $\sigma_{\theta\theta}^{f(e)}, \sigma_{\theta\theta}^{f(n)}, \rho_f^{(e)}, \rho_f^{(n)}$.

Поставленная задача решена численным методом Рунге-Кутты. Решение задачи имеет физический смысл только при соблюдении условия $a(t) \leq a_0$ (a_0 – реальный радиус скважины). Из определения (3.4) видно, что (3.3) выполняется при $\xi_R = \sqrt{2\eta}$ и в пространстве автотомельной переменной на скважине и на контуре питания ставятся те же граничные условия, что и в стационарной задаче.

При численной реализации критерий (3.8) проверялся на каждом шаге вычислений и на контуре питания газа скорость твердых частиц выбиралась так, чтобы выполнялось условие $\sigma_{rr}^{f(n)}$ при $\xi = \xi_a$.

В упругой области контур питания принимается за начало границы сетки. Сначала из уравнения (3.12) определяется p_e , потом последовательно находят $V_e, m_e, W_e, \sigma_{rr}^{f(e)}$ и $\sigma_{\theta\theta}^{f(e)}$. После определения ξ_b из (3.19) аналогично решается задача в пластической зоне. Дебит газа и интенсивность выноса твердых частиц скважины при пластическом течении матрицы пласта вычисляются по скоростям фаз W_n и V_n .

Результаты вычисления представлены на рис. 3.1 – рис. 3.5.

Расчеты проведены для следующих параметров пласта и газа:

$$\begin{aligned} m_e^0 &= 0,3; \nu = 0,25, \\ N_e = N_n &= 3, n = 1,5, k_e = k_n = 10^{-13} m^2, a_0 = 0,1, \\ m, h &= 10m, \mu = 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, K_e = K_n \\ &= 3,85 \cdot 10^5 \text{ Па}, \beta_1 = 10^{-11} \text{ Па}^{-1}, \\ E &= 10^{10} \text{ Па}, \sigma_a^f = 0, \sigma_{rr}^{f(0)} = -5 \cdot 10^7 \text{ Па}, p_0 = 10^7 \text{ Па}, \eta = 2,1 \cdot 10^{-2} m^2 / \text{с}. \end{aligned}$$

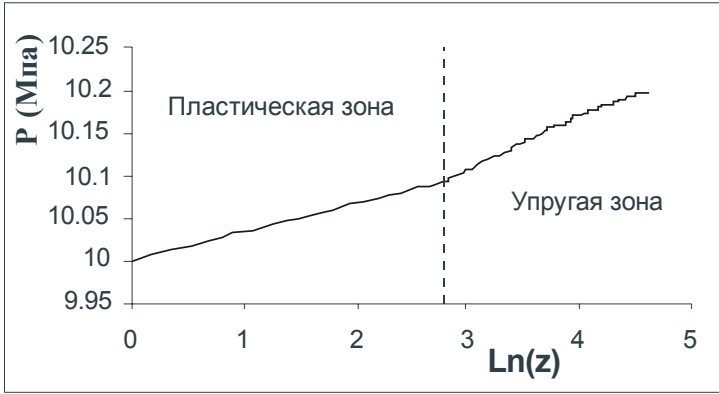


Рис. 3.1. Распределение давления в пластической и упругой зонах

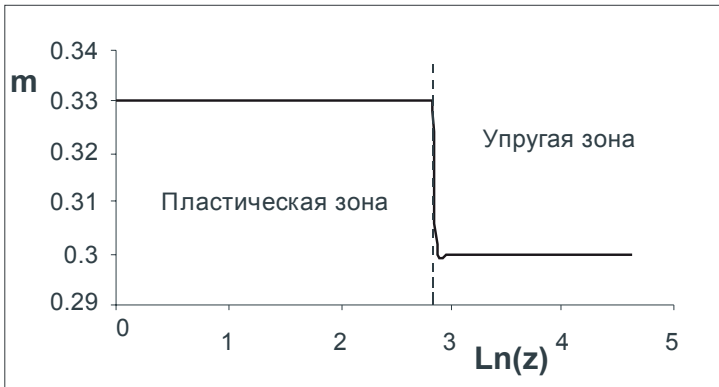


Рис. 3.2. Распределение пористости в пластической и упругой зонах

Из результатов, приведенных на рис. 3.1 и рис. 3.2, видно, что изначально плотная упаковка породы пласта, разрыхляясь, развивает пластическую зону вокруг скважины. В логарифмической координате $\ln z$ пластовое давление и пористость практически не изменяются в пластической зоне. Однако при переходе их пластической зоны в упругую пористость уменьшается скачкообразно и ее рост не заметен.

Из рис. 3.3 и 3.4 видно, что вблизи скважины существенно увеличиваются скорости газа и твердых частиц, которые требуют необходимость учета этих факторов при эксплуатации пласта скважиной.

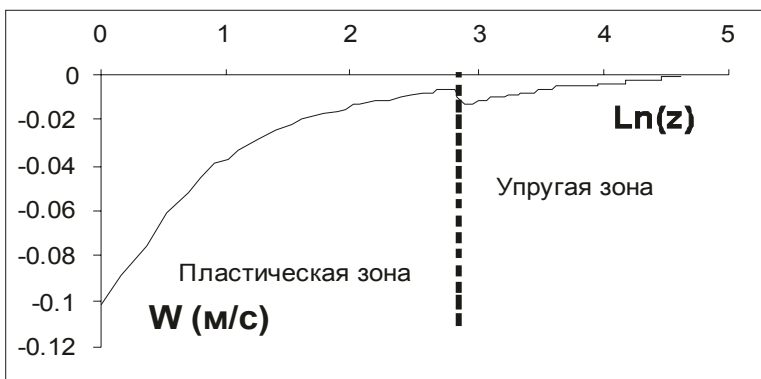


Рис. 3.3. Изменение скорости газа

Кольцевое эффективное напряжение $\sigma_{\theta\theta}^{f(n)}$ значительно падает по сравнению с радиальным $\sigma_{rr}^{f(n)}$ вплоть до границы ξ_b , но при переходе в упругую зону оно скачком восстанавливается и асимптотически стремится к $\sigma_{rr}^{f(e)}$ (рис. 3.5).

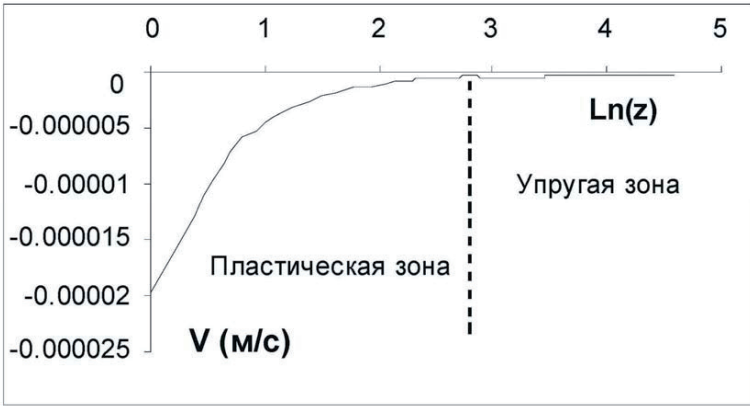


Рис. 3.4. Изменение скорости твердых частиц

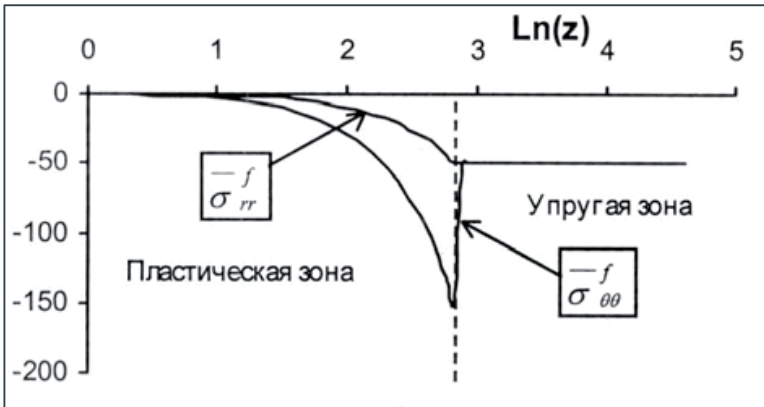


Рис. 3.5. Изменение эффективного напряжения

Таким образом установлено, что главными причинами выноса песка из пласта являются разрушение вследствие дилатанции призабойной зоны, образование каналов и каверн, обрушение их стенок и вышележащих пород.

Основные факторы, влияющие на интенсивность выноса песка, – это глубина залегания пласта, уплотняемость и состояние поверхности забоя, депрессия на пласт, пластовое давление, ухудшение проницаемости, дебит скважины.

В практике добычи флюида применяются различные методы борьбы с выносом песка, включая механические и химические методы укрепления песка путем установки различного вида фильтров и закачки химических реагентов. Поэтому для установки блочных скважинных фильтров требуется не только определить размер пластической области, но и гидродинамические параметры и напряженно-деформированное состояние вокруг эксплуатационной скважины.

3.3. Установившееся движение идеального газа в зонально-однородном дилатансионно-пластическом и упругом круговом пласте

Рассмотрена стационарная фильтрация идеального газа в зонально дилатансионно-пластической и упругой пористой среде в центральную скважину. Определены фильтрационные параметры пласта в кольцевой пластической зоне вокруг скважины и распределения порового давления вдоль пласта. С учетом дилатансионного изменения пористости и коэффициента проницаемости найдена продуктивность скважины.

Изучение распределения порового давления и потока флюида в дилатансионно-пластических пластах представляет большой интерес для изучения проблемы устойчивости призабойной зоны скважины. Течение твердых фрагментов

из пластической зоны пласта в скважину нарушает ее нормальный режим работы, приводит к образованию каверн в призабойной зоне и песчаных пробок в скважине. Для предотвращения выноса песка, обвала призабойной зоны и смятия колонки скважины, а также утолщения пластов, приведенные к оседанию дневной поверхности территории месторождений нуждаются в более простых постановках решения задач о пластических разрушениях пористых сред при фильтрации флюида.

Фильтрация флюида в упругих и вязкоупругих пористых средах в литературе достаточно хорошо изучена [3, 9, 21, 26, 32, 34 и др].

В упрощенных постановках решены некоторые осесимметричные задачи фильтрации несжимаемой жидкости в упругопластических пластах и установлена связь между расходами жидкой и твердой фаз [22, 60, 72, 73, 75].

1. Постановка задачи.

Пусть порода пласта вокруг действующей скважины во внутренней кольцевой зоне с радиусом R подвергается дилатансионно-пластической деформации, а во внешней зоне – линейно-упругой. На контуре питания R_k ($R_k \gg R$) поддерживается постоянное пластовое давление P_0 , а на стенке скважины радиусом R_c радиальное эффективное напряжение и поровое давление P_c меньше соответствующих контурных напряжения и давления. Эффективные напряжения удовлетворяют то условие текучести, при котором вокруг скважины реализуется только одна пластическая зона.

Для стационарного случая в пластической зоне уравнения сохранения масс твердой и жидкой фаз в плоскорадальном пласте имеют вид:

$$\frac{d}{dr} [r(1-m)\rho_1 v_1] = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{d}{dr} [rm\rho_2 v_2] = 0.$$

Здесь m – пористость пласта,
 v_1, v_2 – компоненты истинных скоростей
твердой и газовой фаз,
 ρ_1, ρ_2 плотности материала матрицы и газа.

Уравнение состояния идеального газа, которым будем пользоваться в дальнейшем, записывается в виде

$$\rho_2 = \frac{\rho_{at}}{p_{at}} p, \quad (3.22)$$

Фильтрация газа при $v_2 \gg v_1$ описывается законом Дарси

$$v_2 = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr}. \quad (3.23)$$

В формулах (3.22) и (3.23) ρ_{at} – плотность газа при атмосферном давлении p_{at} , k – коэффициент проницаемости в пластической зоне, μ – динамическая вязкость газа.

Кинематическая связь между скоростями объемной деформации и сдвига матрицы пласта принимает вид [61]

$$\frac{dv_1}{dr} + n \frac{v_1}{r} = 0, \quad (3.24)$$

где

$$n = 1 + \frac{2\Lambda \left(3\Lambda - \sqrt{3(3 - \Lambda^2)} \right)}{3 - 4\Lambda^2}. \quad (3.25)$$

Λ - скорость дилатансии.

При $n > 1$ происходит разрыхление матрицы пласта, при $n < 1$ ее уплотнение, а при $n = 1$ соответствует критическому состоянию матрицы (несжимаемость матрицы пласта). Коэффициент проницаемости пласта на основе экспериментальных данных может быть задан степенной функцией пористости [56].

$$k = k_0 \left(\frac{m}{m_0} \right)^l; \quad (3.26)$$

$$l = \frac{a_k}{a_m},$$

где k_0, m_0 -соответствуют начальным значениям порового давления p_0 ; a_k, a_m -коэффициенты, определяемые при обработке экспериментальных данных.

В упругой зоне при установившейся фильтрация газа распределение давления определяется из следующего уравнения [19, 50]

$$\frac{d^2 p_e}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_e}{dr} = 0, \quad R < r < R_k. \quad (3.27)$$

Граничные условия. На стенке скважины задано поровое давление

$$p(r) = p_e(r) \text{ при } r = R. \quad (3.28)$$

На упругопластической границе должны быть выполнены условия неразрывности поровых давлений и скоростей фильтраций

$$p(r) = p_e \text{ при } r = R_c, \quad (3.29)$$

$$\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{k_e}{\mu} \frac{dp_e}{dr} \text{ при } r = R_c. \quad (3.30)$$

На контуре пластической зоны пористость пласта принимает свое критическое значение

$$m(r) = m_R \text{ при } r = R. \quad (3.31)$$

В зоне течения разрушенной массы интегрирование уравнения (4) приводит к кинематическому интегралу

$$v_1 = \frac{C}{r^n}. \quad (3.32)$$

Подставляя (3.32) в уравнение неразрывности твердой фазы (3.21) и интегрируя его при граничном условии (3.31), получаем

$$m = 1 - (1 - m_R) \frac{\rho_1(R)}{\rho_1(r)} \left(\frac{r}{R} \right)^{n-1}, \quad R_c \leq r \leq R. \quad (3.33)$$

Если считать плотность материала матрицы постоянным, то из (3.33) имеем:

$$m = 1 - (1 - m_R) \left(\frac{r}{R} \right)^{n-1}, \quad R_c \leq r \leq R. \quad (3.34)$$

Из уравнения неразрывности газовой фазы (3.21) с учетом (3.22) следует

$$v_2 = C_1 \frac{p_{am}}{m \rho_{am}} \frac{1}{rp}. \quad (3.35)$$

Подставляя (3.35) в закон фильтрации (3.23) с учетом (3.26) для определения функции давления в области $R_c \leq r \leq R$, приходим к уравнению

$$p \frac{dp}{dr} = - \frac{C_1 p_{am} \mu m_0^l}{\rho_{am} k_o} \frac{1}{r[m(r)]^{l+1}}. \quad (3.36)$$

Решение уравнения (3.36) имеет вид:

$$p^2(r) = - \frac{2C_1 p_{am} \mu m_0^l}{\rho_{am} k_o} \int_r \frac{dr}{r[m(r)]^{l+1}} + C_2 \quad (3.37)$$

где C_2 и C_3 – постоянные интегрирования.

Дважды интегрируя уравнение (3.27) получаем:

$$p_e^2(r) = C_3 \ln r + C_4. \quad (3.38)$$

Используя граничные условия (3.28)-(3.30) и условия на контуре питания с учетом (3.34), определяем постоянные интегрирования C_1 , C_2 , C_3 и C_4 . После подстановки их выражения в (3.37) и (3.38) имеем:

$$p(r) = \sqrt{p_c^2 + \frac{m_R m_0^l k_e (p_o^2 - p_c^2) f(R_c, r)}{m_R m_0^l k_e f(R_c, R) + k_0 \ln \frac{R_k}{R}}}, \quad R_c \leq r \leq R, \quad (3.39)$$

$$p_e(r) = \sqrt{p_o^2 + \frac{k_0 (p_o^2 - p_c^2) \ln \frac{R_k}{r}}{m_R m_0^l k_e f(R_c, R) + k_0 \ln \frac{R_k}{R}}}, \quad R \leq r \leq R_k, \quad (3.40)$$

где

$$f(R_c, r) = - \int_{R_c}^r \frac{dx}{x \left[1 - (1 - m_R) \left(\frac{x}{R} \right)^{n-1} \right]^l},$$

$$f(R_c, R) = \int_{R_c}^R \frac{dx}{x \left[1 - (1 - m_R) \left(\frac{x}{R} \right)^{n-1} \right]^l}.$$

Массовый дебит скважины определяется равенством

$$G = - \frac{2\pi R_c h \rho_{am} k}{\mu p_{am}} p \frac{dp}{dr} \text{ при } r = R_c. \quad (3.41)$$

Посредством элементарных преобразований из (3.39) и (3.41) получим

$$G^* = \frac{\pi k_0 h \rho_{am} m_R k_e (p_o^2 - p_c^2)}{\mu p_{am} \left[1 - (1 - m_R) \left(\frac{R_c}{R} \right)^{n-1} \right] \left[m_R m_0^l k_e f(R_c, R) + k_0 \ln \frac{R}{R_k} \right]}. \quad (3.42)$$

На основе полученного решения (3.39), (3.40) и по формуле (3.42) составлена компьютерная программа для расчетов, которая реализуется при следующих данных:

$$\begin{aligned}
 n &= 0.95; 0.98; 1.0; 1.05; 2.0; \quad R = (0.5; 1.7; 3.0) \text{ м}; \\
 l &= 1; 2; 2.5; 4; \quad h = 10 \text{ м}; \quad R_c = 0.1 \text{ м}; \quad R_k = 100 \text{ м}; \\
 m_R &= 0.3; \quad m_0 = 0.2; \quad k_0 = 10^{-13} \text{ м}^2; \\
 k_e &= 0.5 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2; \quad \mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}; \quad p_{am} = 10^5 \text{ Па}.
 \end{aligned}$$

Результаты расчетов представлены в виде кривых распределения давления и дебита скважины, часть из которых приведена, соответственно, на рис. 3.6; 3.7 и 3.10.

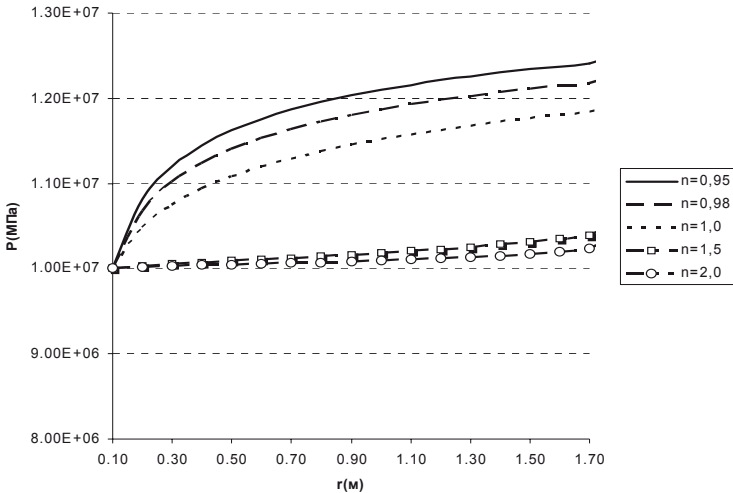


Рис. 3.6. Распределение давления в дилатационно-пластической зоне пласта при $l=2$; $R=1.7$; $R_c \leq r \leq R$

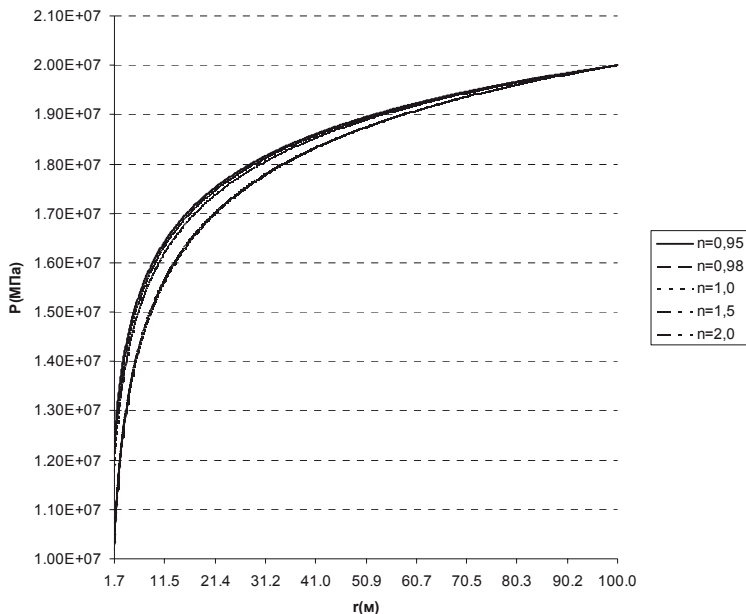


Рис.3.7. Распределение давления в упругой зоне пласта при $l=2$; $R=1.7$; $R \leq r \leq R_k$

Анализ кривых показывает, что в отличие от упругой зоны $r \in [R, R_k]$ (рис.3.7) кривые давления в дилатансионно-пластической зоне $r \in [R_c, R]$ будут изогнутыми (рис. 3.6).

При малых значениях n ($0.95 \leq n \leq 1$) давление в координатах изменяется гораздо более интенсивно, чем при его больших значениях. Уплотнение матрицы в дилатансионно-пластической зоне пласта влечет за собой увеличение давления. Так, например, при фиксированных значениях R и l уменьшение параметра « n » с двух до 0.95 приводит к увеличению порового давления на (9÷17)%.

В упругой зоне $r \in [R, R_k]$ наблюдается обратная картина (рис. 3.7). При тех же данных проведены расчеты по формулам (3.26) и (3.34) для изменения пористости и проницаемости в дилатансионно-пластической зоне пласта, результаты которых представлены на рис. 3.8 и 3.9.

Кривые, представленные на рисунках 3.9 и 3.10 показывают, что разрыхление матрицы в области дилатансионно-пластической зоны пласта приводит к увеличению проницаемости, которое влечет за собой увеличение дебита скважины на 43%.

В случаях уплотнения матрицы пласта по сравнению с ее несжимаемостью массовые дебиты скважины дает существенно заниженные прогнозные оценки.

Зададим массовый дебит G газовой скважины и поровое давление на контуре питания:

$$G^* = -\frac{2\pi R_c h \rho_{am} k}{\mu p_{am}} p \frac{dp}{dr}, \quad (3.43)$$

$$p = p_a \quad \text{при} \quad r = R_k. \quad (3.44)$$

Используя граничные условия (3.29), (3.30), (3.33) и (3.34), находим

$$p = \sqrt{\frac{G\mu_0 p_{at}}{\pi h \rho_{at}} \left[\frac{m_0^l}{k_0} f(r, R) + \frac{1}{k} \ln \frac{R_k}{R} \right] + p_k^2}, \quad R_c \leq r \leq R, \quad (3.45)$$

$$p = \sqrt{\frac{G\mu_0 p_{at}}{\pi h \rho_{at}} \ln \frac{R_k}{r} + p_k^2}, \quad R \leq r \leq R_k. \quad (3.46)$$

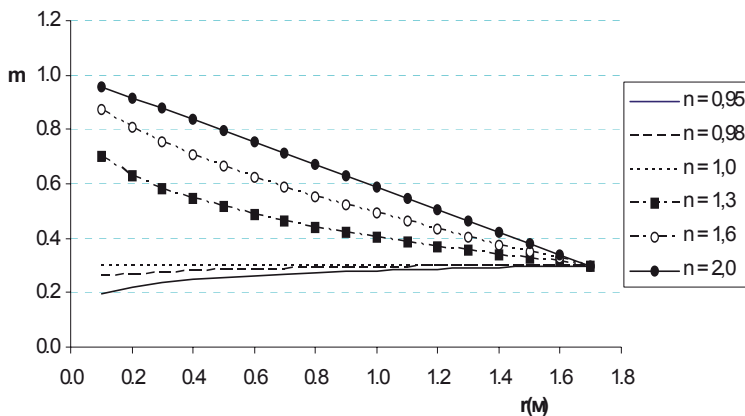


Рис. 3.8. Изменение пористости пласта в дилатансионно-пластической зоне при $l=2$; $R=1.7$; $R_c \leq r \leq R$

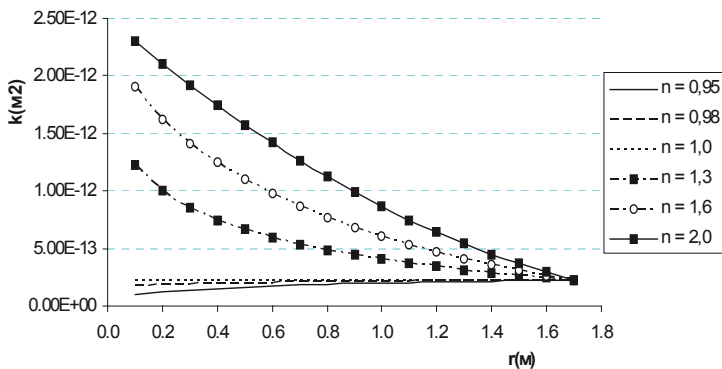


Рис. 3.9. Изменение коэффициента проницаемости пласта в дилатансионно-пластической зоне при $l=2$; $R=1.7$; $R_c \leq r \leq R$.

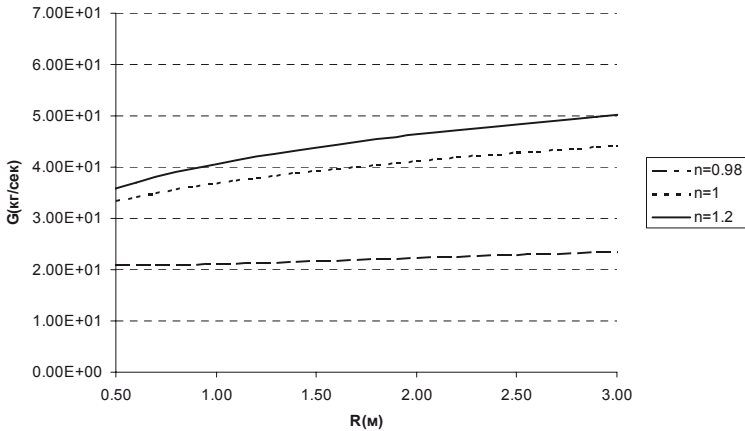


Рис. 3.10. Зависимость массового дебита скважины от радиуса дилатансионно-пластической зоны при $l=2$.

Формулы для скоростей фильтрации при радиальном течении идеального газа в упруго-пластическом пласте имеют вид:

$$v_2 = \frac{G}{2\pi h \rho_{at}} \cdot \frac{1}{rm(r)p(r)}, \quad R_c \leq r \leq R, \quad (3.47)$$

$$v_{2e} = \frac{G}{2\pi h \rho_{at}} \cdot \frac{1}{rm_e(r)p_e(r)}, \quad R \leq r \leq R_k. \quad (3.48)$$

Как известно, в газовом пласте поровое давление медленно изменяется вблизи контура питания и резко падает вокруг скважины. Так как скорость изменения порового давления определяет градиент давления, который, в свою

очередь, определяет скорость фильтрации, то указанное поведение давления в газовом пласте приводит к нарушению закона Дарси в прискважинной зоне. Рассмотрим решение соответствующей задачи при двучленном законе фильтрации [23]:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\mu_0}{k} m \rho_2 v_2 + \frac{\beta}{\sqrt{k}} (m \rho_2 v_2)^2, \quad (3.49)$$

где β – константа пористой среды, определяемая в результате обработки экспериментальных данных, P – функция Лейбензона.

$$P = \int p_2 dp = \frac{\rho_{at}}{2 p_{at}} p^2 + C. \quad (3.50)$$

В пластической зоне

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} = & -\frac{G\mu_0}{2\pi h} \cdot \frac{1}{rk(r)} + \beta \left(\frac{G}{2\pi h} \right)^2 \times \\ & \times \frac{1}{r^2 \sqrt{k(r)}} + p_R^2, \quad R_c \leq r \leq R. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Решение (3.51) имеет вид

$$P = \frac{G\mu_0}{2\pi h} \cdot \int_{R_c}^R \frac{dr}{rk(r)} - \beta \left(\frac{G}{2\pi h} \right)^2 \int_{R_c}^R \frac{dr}{r^2 \sqrt{k(r)}} + p_R^2. \quad (3.52)$$

Переходя от функции Лейбензона к давлению по формуле (3.52), найдем распределение давления

$$p = \sqrt{\frac{Q\mu_0 p_{at}}{2\pi h} \int_{R_c}^r \frac{1}{rk(r)} - \frac{\beta \rho_{at} p_{at}}{2} \left(\frac{Q}{\pi h}\right)^2 \int_{R_c}^R \frac{1}{r^2 \sqrt{k(r)}} + p_R^2}, \quad (3.53)$$

$$R_c \leq r \leq R.$$

Не представляет трудности определение порового давления в упругой зоне пласта

$$p_e = \sqrt{p_k^2 + \frac{Q\mu_0 p_{at}}{\pi h k_e} \ln \frac{R_k}{r} - \frac{\beta_e \rho_{at} p_{at}}{2\sqrt{k_e}} \left(\frac{Q}{\pi h}\right)^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k}\right)}, \quad (3.54)$$

$$R_c \leq r \leq R.$$

Из равенства давлений (3.53) и (3.54) на границе R , находим

$$p_R^2 = p_k^2 + \frac{Q\mu_0 p_{at}}{\pi h k_e} \ln \frac{R_k}{R} - \frac{\beta_e \rho_{at} p_{at}}{2\sqrt{k_e}} \left(\frac{Q}{\pi h}\right)^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_k}\right). \quad (3.55)$$

С помощью выражений (3.26) и (3.34) можно вычислить интеграл (3.53). Из этой формулы следует связь между депрессией на пласт и расходом

$$p_k^2 - p_a^2 = -\frac{Q\mu_0 p_{at}}{\pi h k_e} \left[\int_{R_c}^R \frac{1}{rk(r)} + \frac{1}{k_e} \ln \frac{R_k}{r} + \right. \\ \left. + \frac{\rho_{at} p_{at}}{2} \left(\frac{Q}{\pi h}\right)^2 \left(\beta \int_{R_c}^R \frac{dr}{r^2 \sqrt{k(r)}} + \frac{\beta_e}{k_e} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k}\right) \right) \right], \quad R_c \leq r \leq R_k. \quad (3.56)$$

Построенная индикаторная линия в координатах Q и $(p_k^2 - p_a^2)$ является параболой, но коэффициенты фильтра-

ционных сопротивлений зависят от фильтрационных параметров пластической и упругой зоны

$$p_k^2 - p_a^2 = A Q_2 + B Q_2^2 \quad (3.57)$$

где A, B – коэффициенты фильтрационных сопротивлений, постоянные для данной скважины. Тогда

$$A = -\frac{\mu_0 P_{at}}{\pi h} \left(\int_{R_c}^R \frac{1}{rk(r)} + \frac{1}{k_e} \ln \frac{R_k}{r} \right),$$

$$B = \frac{\rho_{at} P_{at}}{2} \left[\beta \int_{R_c}^R \frac{dr}{r^2 \sqrt{k(r)}} + \frac{\beta_e}{k_e} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right) \right];$$

$$Q = \frac{G}{\rho_{at}} - \text{объемный дебит скважины.}$$

Уравнение притока (3.57) с экспериментально определяемыми коэффициентами можно использовать в расчетах при проектировании разработки месторождений. По значениям A и B , найденным в результате исследования скважины, можно определить коллекторские свойства пласта. Графики в координатах Q и $\frac{p_k^2 - p_a^2}{Q}$, соответственно,

представляют собой прямые линии, для которых A – отрезок, отсекаемый на оси ординат, B – тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс.

Таким образом, введена аналитическая связь между поровым давлением, дебитом скважины и скоростями дилатансии в упругопластическом газовом пласте.

Глава IV.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛЗУЧЕМ ПЛАСТЕ

Опыт разработки нефтяных и газовых месторождений при упругом режиме подтверждает представление об упругой деформации горных пород при небольших изменениях давления в пласте. Однако, при более широких диапазонах изменения пластового давления деформация горных пород носит существенно нелинейный характер, что подтверждается, например, видом экспериментальных зависимостей пористости горных пород и их проницаемости от среднего нормального напряжения или от внутривыводного давления. Впервые учет необратимой деформации горных пород при разработке нефтяных месторождений был осуществлен А.П.Крыловым и Г.И.Баренблаттом, создавшими теорию упругопластического режима нефтяных пластов.

Согласно этой теории физическая нелинейная зависимость пористости и проницаемости пород от среднего нормального напряжения приближенно принимается линейной или кусочно-линейной, но различной при нагружении пород (увеличением среднего нормального напряжения) и при разгрузке (уменьшением среднего нормального напряжения).

Представление о кусочно-линейной деформации горных пород при нагружении и разгрузке горной породы в случае упругопластического режима не дает возможности вполне точно описать механизм фильтрации в породах, деформирующихся по сложным реологическим законам.

Горные породы обладают способностью деформироваться во времени без увеличения напряжений, вызванных объемными или поверхностными силами, т.е. обладают

свойством ползучести.

Ползучесть различных материалов и пород характеризуется определенной зависимостью деформации в данный момент времени от всей предыдущей истории деформирования материалов и пород.

Учет свойства ползучести материала имеет важное значение, привлекает внимание многих исследователей, появилась обширная, все возрастающая литература, посвященная этой проблеме.

С ростом глубины вводимых в разработку месторождений фактов «наследственно-ползучего» поведения пластов становится значительно больше. Это и вызывает необходимость развития, теории фильтрации в пластах, которым свойственна ползучесть.

В работе [49] рассмотрена задача, связанная с установлением влияния ползучего характера деформации горных пород на фильтрацию жидкости и газа, и показана необходимость учета ползучести горных пород.

Задача о неустановившемся притоке к несовершенной по степени вскрытия скважине в неоднородном упругом пласте, состоящем из двух пропластков, рассматривалась в [4].

4.1. Приток жидкости к несовершенной скважине в однородном пласте с ползучей средой

Предположим, что конечный однородный цилиндрический пласт с ползучей средой мощностью « H » и радиусом « R », ограниченный двумя непроницаемыми поверхностями вскрыт несовершенной скважиной с дебитом q и фильтром « h » (рис. 4.1).

Согласно теории фильтрации, математически задача сводится к определению функций давления $p(r, z, t)$ в области $\{0 \leq r \leq R; 0 \leq z \leq H; 0 \leq t\}$, удовлетворяющей интегриродифференциальное уравнение типа свертки [34].

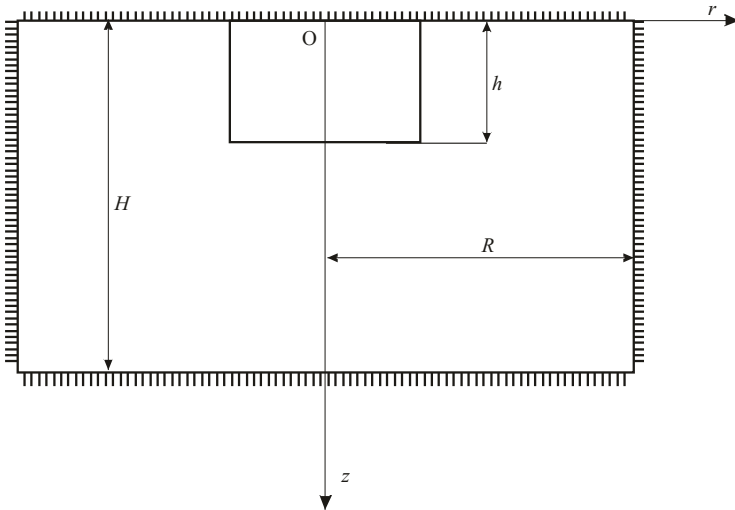


Рис. 4.1. Элементы однородного пласта с ползучей средой

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\mu q \sigma(r)}{2\pi khr} [\sigma(z) - \sigma(z-h)] \delta(r) =$$

$$= \frac{1}{\chi} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{m_1}{\chi \beta_{жс}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u \exp(-\gamma(t-\tau)) d\tau, \quad (4.1)$$

при следующих условиях:

$$u|_{t=0} = 0 \quad (0 < r \leq R, \quad 0 \leq z \leq H)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0;H} = 0 \quad (0 < r \leq R, \quad 0 \leq t < +\infty)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (0 < z \leq H, 0 \leq t < +\infty) \quad (4.2)$$

где

$$\chi = km_0^{-1} \mu^{-1} \beta_{ж}^{-1},$$

$$u(r, z, t) = P_0 - P(r, z, t),$$

где $P(r, z, t)$ – текущее давление в пласте; $\delta(r)$ – дельтафункция Дирака, $\sigma(z)$ – единичная функция Хевисайда; κ – проницаемость пласта; m_l – параметр ползучести; μ – динамическая вязкость жидкости; m_o – пористость пласта; q – дебит скважины, $\beta_{ж}$ – коэффициент упругой сжимаемости жидкости, h – глубина вскрытия скважины; j^{-1} – время релаксации.

Применяя к (4.1)-(4.2) конечное интегральное преобразование Ханкеля по переменным « r » с учетом свойства дельта-функции Дирака, получим:

$$-\lambda_m^2 u_m + \frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2} + \frac{\mu q}{2\pi k} [\sigma(z) - \sigma(z-h)] = \quad (4.3)$$

$$= \frac{1}{\chi} \frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{m_1}{\chi \beta_{ж}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u_m \exp(-\gamma(t-\tau)) d\tau,$$

$$u_m \Big|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq z \leq H)$$

$$\left. \frac{\partial u_m}{\partial z} \right|_{z=0;H} = 0 \quad (0 \leq t < +\infty) \quad (4.4)$$

Здесь

$$u_m = \int_0^R ur J_0(\lambda_m r) dr ,$$

где $J_0(r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, λ_m – корень характеристического уравнения

$$J'(\lambda R) = 0 .$$

Применяя к (4.3)-(4.4) косинус-преобразования Фурье по переменной z с учетом свойства функции Хевисайда имеем

$$a \frac{du_{mn}}{dt} + b \frac{d}{dt} \int_0^t u_{mn} \exp(-\gamma(t-\tau)) d\tau + \lambda_{mn}^2 u_{mn} = \varphi_n \quad (4.5)$$

$$u_{mn}(t)|_{t=0} = 0 . \quad (4.6)$$

Здесь

$$a = \frac{1}{\chi} ;$$

$$b = \frac{m_1}{\chi \beta_{эс}} ;$$

$$\varphi_n = \frac{\mu q}{2\pi k} \cdot \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n h ;$$

$$\lambda_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \lambda_n^2;$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{H} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$u_{mn} = \int_0^H u_m \cos \lambda_n z dz.$$

Применив преобразование Лапласа и учитывая начальные условия (4.6), из (4.5) получим:

$$\bar{u}_{mn} = \frac{S + \gamma}{S(aS^2 + a_{mn}S + b_{mn})} \varphi_n, \quad (4.7)$$

где

$$a_{mn} = a\gamma + b + \lambda_{mn}^2,$$

$$b_{mn} = \gamma\lambda_{mn}^2,$$

$$\bar{u}_{mn} = \int_0^\infty u_{mn} e^{-St} dt.$$

S – параметр преобразования Лапласа, $Res > 0$.

Применяя обратное преобразование Лапласа и теорему разложения Хевисайда из (4.7), находим:

$$u_{mn} = \frac{\gamma}{b_{mn}} + (a_{mn}^2 - 4ab_{mn}) \left[\frac{S_{2mn} + \gamma}{S_{2mn}} \exp(S_{2mn} t) - \frac{S_{1mn} + \gamma}{S_{1mn}} \exp(S_{1mn} t) \right] \varphi_n, \quad (4.8)$$

здесь

$$S_{jmn} = \frac{-a_{mn} + (-1)^j \sqrt{a_{mn}^2 - 4ab_{mn}}}{2a} \quad (j = 1, 2).$$

При помощи обратного преобразования Фурье и Ханкеля решение поставленной задачи находится в виде:

$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{h}{2\pi CR^2} \left[\gamma + \frac{C - a\gamma}{C} \left(1 - \exp\left(-\frac{C}{a} t\right) \right) \right] + \\ & + \frac{2}{\pi h R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sin(\lambda_n h) \cdot \left\{ \frac{1}{\lambda_{mn}^2} + (a_{mn}^2 - 4ab_{mn})^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ & \times \left[\frac{(S_{2mn} + \gamma) \exp(S_{2mn} t)}{S_{2mn}} - \frac{(S_{1mn} + \gamma) \exp(S_{1mn} t)}{S_{1mn}} \right] \Big\} \times \\ & \times \frac{J_0(\lambda_m r)}{J_0^2(\lambda_m R)} \cos(\lambda_n z), \quad (4.9) \end{aligned}$$

где $C = a\gamma + b$;

$$\Delta u = \frac{(p_0 - p)kH}{\mu q}.$$

Осредняя (4.9) по вскрываемой скважиной части пласта, определяем среднее значение безразмерного забойного давления:

$$\begin{aligned} \Delta u_c = & \frac{1}{2\pi CR^2} \left[\gamma t + \frac{C - a\gamma}{C} \left(1 - \exp\left(-\frac{C}{a}t\right) \right) \right] + \\ & + \frac{2}{\pi h R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sin^2(\lambda_n h) \times \left\{ \frac{1}{\lambda_{mn}^2} + (a_{mn}^2 - 4ab_{mn})^{-\frac{1}{2}} \times \right. \\ & \times \left. \left[\frac{(S_{2mn} + \gamma) \exp(S_{2mn} t)}{S_{2mn}} - \frac{(S_{1mn} + \gamma) \exp(S_{1mn} t)}{S_{1mn}} \right] \right\} \\ & \times \frac{J_0(\lambda_m r_c)}{J_0^2(\lambda_m R)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь

$$\Delta u_c = \frac{(p_0 - p_c)kH}{\mu q}.$$

В случае упругого режима фильтрации, т.е. когда $m_1=0$, $\gamma = \infty$, выражение (4.10) принимает вид:

$$\Delta u_c = \frac{1}{2\pi R^2} \gamma t + \frac{2}{\pi R^2 h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n^2} \sin^2(\lambda_n h) \times \right.$$

$$\times \frac{1}{\lambda_{mn}} (1 - \exp(-\lambda_{mn} t)) \frac{J_0(\lambda_n r_c)}{J_0^2(\lambda_m R)} \Big] \quad (4.11)$$

В случае фильтрации жидкости к несовершенной скважине в однородно-анизотропном пласте с ползучей средой смешанная задача (4.1)-(4.2) принимает вид:

$$k_r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k_r \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{q \mu \delta(r)}{2\pi h r} [\sigma(z) - \sigma(z-h)] = \quad (4.12)$$

$$= \frac{1}{\chi_1} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{m_1}{\chi_1 \beta^*} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u \exp(-\gamma(t-\tau)) d\tau$$

$$u|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq H),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0:H} = 0 \quad (0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq t < \infty), \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \quad (0 \leq z \leq H, \quad 0 \leq t < \infty).$$

Согласно предыдущему случаю безразмерное значение забойного давления будет определяться по формуле

$$\Delta u_c = \frac{1}{2\pi\alpha k_r R^2} \left[\gamma + \frac{c_1}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{b_1} t\right) \right) \right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi h k_r R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n h)}{\lambda_n} \left\{ \frac{1}{\lambda_{mn}^2} + \left(a_{mn}^2 - 4b_1 \cdot \bar{b}_{mn} \right)^{\frac{1}{2}} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{\bar{S}_{2mn} + \gamma}{\bar{S}_{2mn}} \exp(\bar{S}_{2mn} t) - \frac{\bar{S}_{1mn} + \gamma}{\bar{S}_{1mn}} \exp(\bar{S}_{1mn} t) \right] \times \quad (4.11)$$

$$\times \frac{J_0(\lambda_m r_c)}{J_0^2(\lambda_m R)},$$

где

$$\Delta u_c = \frac{(p_0 - p_c) k_0 H}{\mu q}; \quad \alpha = b_1 \gamma + c_1.$$

$$b_1 = \frac{1}{\chi_1 k_r}; \quad \chi_1 = (m_0 \mu \beta_{\text{жс}})^{-1};$$

$$\bar{a}_{mn} = a + \bar{\lambda}_{mn}^2;$$

$$\bar{\lambda}_{mn}^2 = \lambda_m^2 + k^2 \lambda_n^2;$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{H} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\bar{b}_{mn} = \gamma \cdot \bar{\lambda}_{mn}^2, \quad k^2 = \frac{k_z}{k_r};$$

$$\bar{S}_{jmn} = \frac{-\bar{a}_{mn} + (-1)^j \sqrt{\bar{a}_{mn}^2 - 4b_1 \bar{b}_{mn}}}{2}; \quad (j = 1; 2).$$

4.2. Результаты численных расчетов

Для количественной оценки влияния ползучести пористой среды на процесс фильтрации по формуле (4.10) проведены многовариантные расчеты при исходных данных:

$$\gamma = (4,3 \div 8,6) \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{сек}};$$

$$m_1 = (3,4 \div 10,2) \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{МПа} \cdot \text{сек}};$$

$$m_0 = 0,2; \quad \mu = 10^{-9} \text{ МПа} \cdot \text{сек};$$

$$k = 0,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2; \quad H = 100 \text{ м};$$

$$h = 0,1 \div 100 \text{ м}; \quad \beta_{\text{жс}} = 10^{-3} \frac{1}{\text{МПа}};$$

$$r_c = 0,1 \text{ м}; \quad R = 1000 \text{ м}.$$

Некоторые результаты этих расчетов представлены на рисунках 4.2-4.6.

На рис. 4.2. показана динамика понижения безразмерного забойного давления при различных по степени вскрытиях пласта скважинной от времени.

Как видно на рис. 4.2., при одном и том же значении времени понижение забойного давления сильно уменьшается с увеличением степени вскрытия пласта скважиной «*h*».

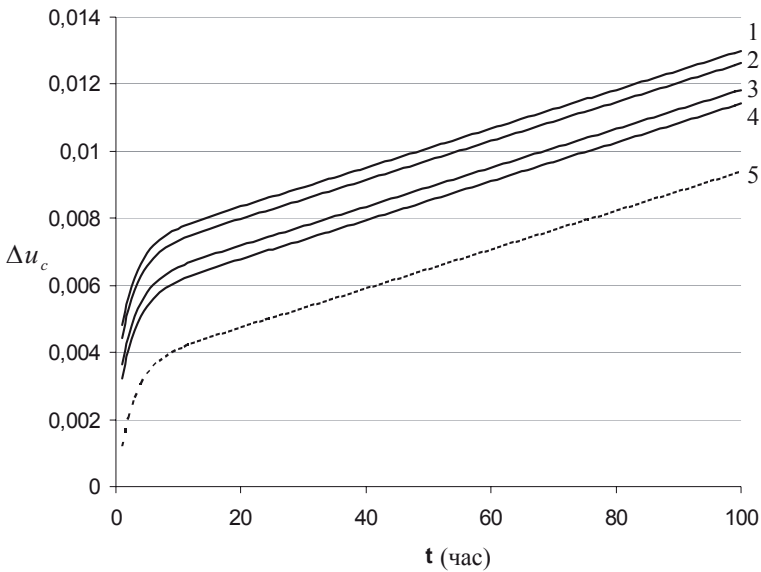


Рис. 4.2. Динамика понижения безразмерного забойного давления во времени при различных по степени вскрытиях пласта скважиной

$$\gamma = 4,3 \cdot 10^{-6} \quad 1/\text{сек}$$

$$m_1 = 3,4 \cdot 10^{-8} \quad 1/\text{Мпа} \cdot \text{сек}$$

$$h_1 = 0,1 \text{ м}; \quad h_2 = 10 \text{ м}; \quad h_3 = 20 \text{ м};$$

$$h_4 = 50 \text{ м}; \quad h_5 = 100 \text{ м};$$

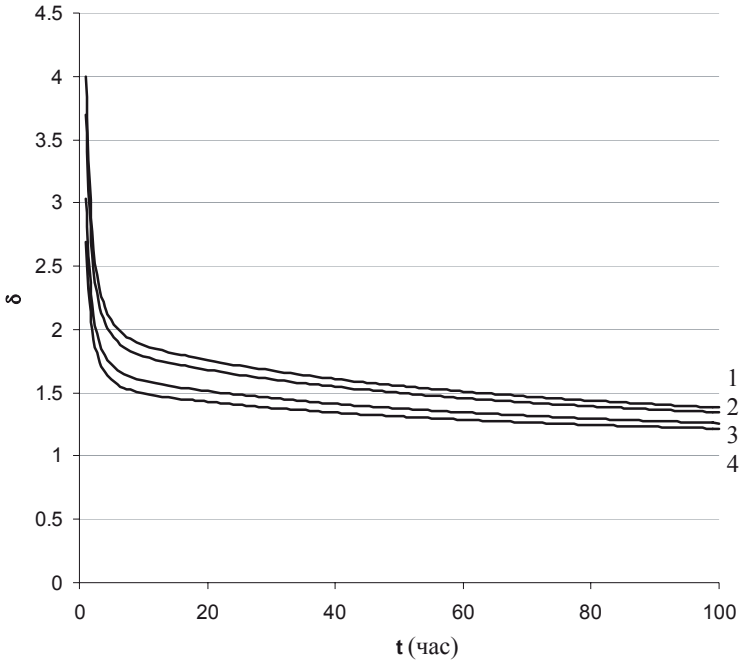


Рис. 4.3. Зависимость коэффициента несовершенства скважины δ от h во времени

$$\gamma = 4,3 \cdot 10^{-6} \quad 1/\text{сек}$$

$$m_1 = 3,4 \cdot 10^{-8} \quad 1/\text{Мпа} \cdot \text{сек}$$

$$h_1 = 0,1 \text{ м}; \quad h_2 = 10 \text{ м}; \quad h_3 = 20 \text{ м}; \quad h_4 = 50 \text{ м}.$$

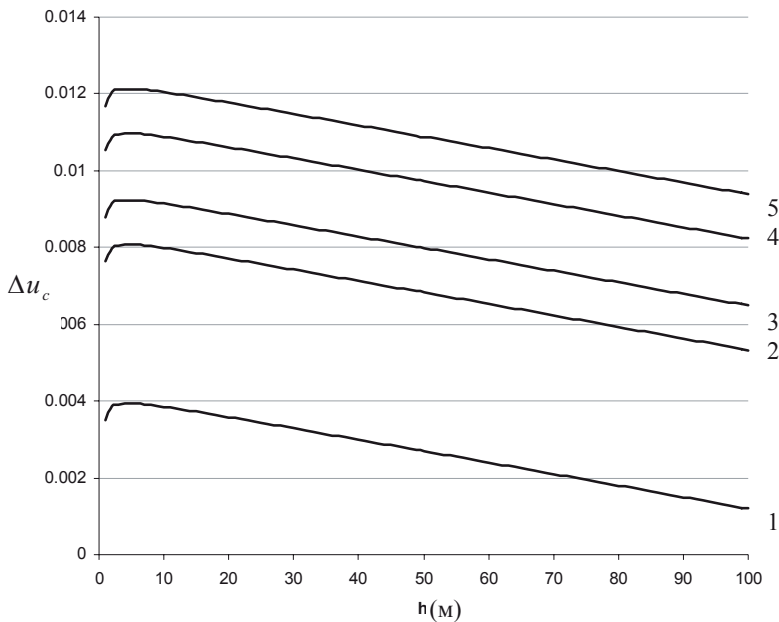


Рис. 4.4. Динамика понижения безразмерного забойного давления при фиксированных значениях времени от степени вскрытия пласта скважиной.

$$t_1 = 1 \text{ час}; t_2 = 10 \text{ час}; t_3 = 20 \text{ час}; t_4 = 50 \text{ час}; \\ t_5 = 80 \text{ час}; t_6 = 100 \text{ час}.$$

$$\gamma = 4,3 \cdot 10^{-6} \quad 1/\text{сек}$$

$$m_1 = 3,4 \cdot 10^{-8} \quad 1/\text{Мпа} \cdot \text{сек}$$

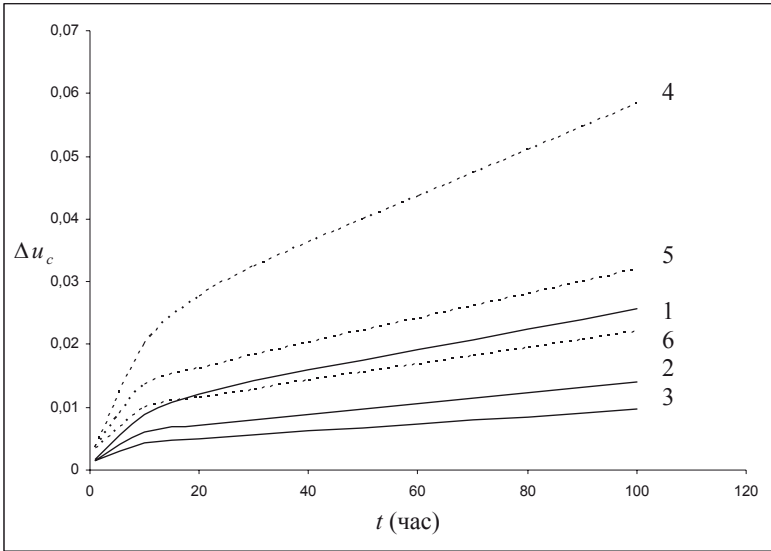


Рис. 4.5. Изменение безразмерного забойного давления во времени при различных значениях параметра ползучести

Здесь $\gamma = 4,3 \cdot 10^{-6}$ 1/сек.

1. $m_1 = 3,4 \cdot 10^{-8}$ 1/МПа·сек; 2. $m_1 = 4,3 \cdot 10^{-6}$ 1/МПа·сек;

3. $m_1 = 8,6 \cdot 10^{-6}$ 1/МПа·сек.

На 4, 5 и 6-ой кривых показано изменение безразмерного забойного давления в упругом режиме.

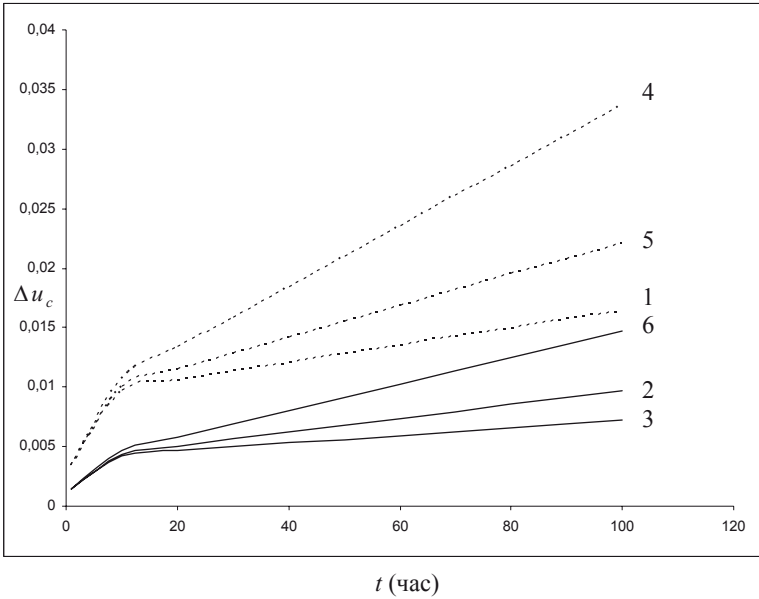


Рис. 4.6. Изменение безразмерного забойного давления во времени при различных значениях времени релаксации

1. $\gamma = 2.3 \cdot 10^{-6}$ 1/сек; 2. $\gamma = 4.3 \cdot 10^{-6}$ 1/сек; 3. $\gamma = 8.6 \cdot 10^{-6}$ 1/сек.

Здесь $t_1 = 4,3 \cdot 10^{-8}$ 1/МПа · сек .

На 4., 5. и 6-ой кривых показано изменение безразмерного забойного давления в упругом режиме.

На рис. 4.3. построены кривые, характеризующие зависимость коэффициента совершенства:

$$\delta = \frac{\Delta u_{\text{ср.нес.}}}{\Delta u_{\text{ср.сов.}}}$$

(отношение безразмерного забойного давления несовершенной и совершенной скважин) от времени.

Как видно из графиков, довольно резкое возрастание коэффициента « δ » наблюдается при малых значениях h и времени.

Увеличение значения « h » и времени приводит к уменьшению величины δ .

Анализ кривых, приведенных на рисунках 4.5 и 4.6. показывает, что с увеличением параметра ползучести « m_1 » уменьшается величина $\overline{\Delta p_c}$ в ползучей среде.

По характеру изменения во времени кривые Δu_c как для пласта с ползучей средой, так и для недеформируемого пласта идентичны. Как видно, при $t > 5$ часов значения Δu_c для любых « m_1 » и « γ » с достаточной точностью совпадают с u и их можно считать одинаковыми как для ползучей среды, так и недеформируемой.

Обобщая сказанное, можно отметить, что при $t < 5$ часов влиянием ползучей деформации пористой среды на технологические показатели (например, на Δu_c) с высокой точностью можно пренебречь. Однако ползучая деформация пористой среды на величину Δu_c оказывает существенное влияние во времени при $t > 5$ часов.

Причем, чем меньше значения γ (рис. 4.6), т.е. чем больше время релаксации среды по пористости, тем меньше значение Δu_c для обеспечения заданного уровня добычи жидкости из месторождения.

4.3. Приток жидкости к несовершенной скважине в неоднородных ползучих средах

В данном параграфе решена задача о притоке жидкости к несовершенной по степени вскрытия скважине в неоднородных ползучих средах.

Предполагается, что пласт состоит из двух пропластков различной проницаемости и в каждом пласте работает одна несовершенная скважина (рис. 4.7).

Данная задача с помощью обобщенных функций имеет следующую математическую постановку: найти в области

$$D_1 = \{0 < r \leq R, 0 \leq z = h_1\}, \quad D_2 = \{0 < r \leq R, h_1 \leq z \leq H\}$$

решение системы интегро-дифференциальных уравнений типа свертки:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{\mu q_j}{2\pi k_j b_j r} [\sigma(z - h_{j-1}) - \sigma(z - h_{j-1} - b_j)] \delta(r) = \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{m_1}{\chi_j \beta_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u_j \exp(-\gamma(t - \tau)) d\tau, \quad (j = 1, 2)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u_j|_{t=0} = 0$$

$$(0 < r \leq R, \quad 0 \leq z \leq h_1 / z \in D_1, \quad h_1 \leq z \leq H / z \in D_2)$$

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial z} \right|_{z=0;H} = 0 \quad (0 < r \leq R, 0 \leq t < +\infty), \quad (4.16)$$

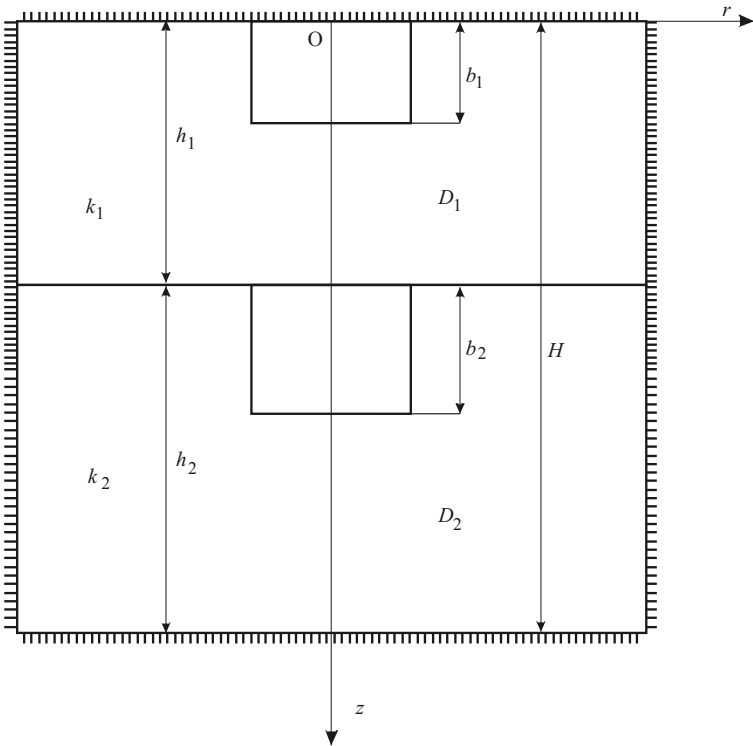


Рис. 4.7. Элементы неоднородного пласта с ползучей средой

$$\frac{\partial u_j}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$$

$$(0 \leq z \leq h_1 / z \in D_1, h_1 \leq z \leq H / z \in D_2, 0 \leq t < +\infty)$$

На общих границах зон неоднородности имеют место условия:

$$u_1 \Big|_{z=h_1} = u_2 \Big|_{z=h_1},$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=h_1} \quad (0 < r \leq R, 0 \leq t < +\infty), \quad (4.17)$$

где

$$h_0 = 0, H = h_1 + h_2,$$

$$\chi_j = k_j m_0^{-1} \mu^{-1} \beta_m^{-1} \quad (j = 1, 2) \quad u_j(r, z, t) = P_0 - P_j(r, z, t)$$

$P_j(r, z, t)$ – текущее давление в j – ом пласте; $b(z)$ – единичная функция Хевисайда; κ_j – проницаемость j – й зоны; h_1, h_2 – мощность первой и второй зоны; q_j – дебит скважины, работающей в j – й зоне, b_j – глубина вскрытия скважины в j – м пласте.

Применяя для решения поставленной задачи (4.15)-(4.17) конечное преобразование Ханкеля и учитывая свойства дельтафункции Дирака, получим:

$$\begin{aligned} & -\lambda_m^2 u_{jm} + \frac{\partial^2 u_{jm}}{\partial z^2} + \frac{\mu q_j}{2\pi k_j b} \times \\ & \times [\sigma(z - h_{j-1}) - \sigma(z - h_{j-1} - b_j)] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial u_{jm}}{\partial t} + \frac{m_1}{\chi_j \beta_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u_j \exp(-\gamma(t-\tau)) d\tau, \quad (j=1,2) \quad (4.18)$$

$$u_{jm} \Big|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq z \leq h_1 / z \in D_1, h_1 \leq z \leq H / z \in D_2)$$

$$\frac{\partial u_{jm}}{\partial z} \Big|_{z=0;H} = 0 \quad (0 \leq t < +\infty),$$

$$u_{1m} \Big|_{z=h_1} = u_{2m} \Big|_{z=h_1},$$

$$k_1 \frac{\partial u_{1m}}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = k_2 \frac{\partial u_{2m}}{\partial z} \Big|_{z=h_1} \quad (0 \leq t < +\infty), \quad (4.19)$$

здесь

$$u_j(\lambda, z, t) = \int_0^R u_j r J_0(\lambda r) dr,$$

где $J_0(r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, λ_m – положительный корень характеристического уравнения

$$J'_0(\lambda_m R) = 0.$$

Напишем совокупность собственных функций $\psi_{jmn}(z)$ ($j=1,2$), удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi_{jmn}(z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\lambda_{mn}}{\chi_j} - \lambda_m^2 \right) \psi_{jmn}(z) = 0 \quad (4.20)$$

и условиям сопряжения:

$$\begin{aligned} \psi_{1mn}(z)\Big|_{z=h_1} &= \psi_{2mn}(z)\Big|_{z=h_1}, \\ k_1 \frac{d\psi_{1mn}(z)}{dz}\Big|_{z=h_1} &= k_2 \frac{d\psi_{2mn}(z)}{dz}\Big|_{z=h_1} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь λ_{mn} – собственные значения соответствующей задачи (4.20)-(4.21) Штурма – Лиувилля.

Функции $\psi_{jmn}(z)$ на концах интервала должны удовлетворять следующим однородным граничным условиям:

$$\psi_{1mn}(0) = \psi_{2mn}(H) = 0 \quad (4.22)$$

Собственные функции $\psi_{1mn}(z)$, $\psi_{2mn}(z)$, соответствующие задачам (4.20)-(4.21), имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_{1mn}(z) &= C_{mn} \cos(\mu_{1mn}z), \\ \psi_{2mn}(z) &= C_{mn} \frac{\cos(\mu_{1mn}h_1)}{\cos(\mu_{2mn}h_2)} \cos(\mu_{2mn}(H-z)), \\ \mu_{jmn} &= \frac{\lambda_{mn}}{\chi_j} - \lambda_m \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

Коэффициенты C_{mn} определяются из условия нормированности функций $\psi_{1mn}(z)$, $\psi_{2mn}(z)$ в областях D_1 и D_2 с весом,

$$\gamma(z) = \begin{cases} \frac{k_1}{\chi_1}, & 0 \leq z \leq h_1 \\ \frac{k_2}{\chi_2}, & h_1 \leq z \leq H \end{cases}$$

$$\frac{k_1}{\chi_1} \int_0^{h_1} \psi_{1mn}^2(z) dz + \frac{k_2}{\chi_2} \int_{h_1}^H \psi_{2mn}^2(z) dz = 1$$

$$C_{mn} = \sqrt{2} \left[\frac{k_1}{\chi_1} \left(h_1 + \frac{\sin 2\mu_{1mn}^2 h_1}{2\mu_{1mn}^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{k_2}{\chi_2} b_{mn} \left(h_2 + \frac{\sin 2\mu_{2mn}^2 h_2}{2\mu_{2mn}^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

где

$$b_{mn} = \frac{\cos^2(\mu_{1mn} h_1)}{\cos^2(\mu_{2mn} h_2)}.$$

Применяя стандартные процедуры, собственные числа определяем из следующих трансцендентных систем уравнений:

$$\begin{cases} k_1 \mu_{1mn} \operatorname{tg}(\mu_{1mn} h_1) + k_2 \mu_{2mn} \operatorname{tg}(\mu_{2mn} h_2) = 0 \\ \chi_1 (\lambda_m^2 + \mu_{1mn}^2) = \chi_2 (\lambda_m^2 + \mu_{2mn}^2). \end{cases}$$

Используя метод собственных функций Гринберга Г.А., для решения системы (4.18)-(4.19) и учитывая свойства единичной функции Хевисайда, получим задачу типа Коши: т.е. умножая уравнение (4.18) соответственно на $\chi_1 \psi_{1mn}$, $\chi_2 \psi_{2mn}$ и интегрируя первый из полученных результатов по z , от нуля до $z=h_1$, а второй от $z=h_1$ до $z=H$, складывая эти уравнения и учитывая условия (4.19) и (4.21), получим:

$$\frac{d\Phi_{mn}}{dt} + a \frac{d}{dt} \int_0^t \Phi_{mn}(\tau) \exp(-\gamma(t-\tau)) d\tau +$$

$$+ \lambda_{mn} \Phi_{mn}(t) = B_{mn}$$
(4.23)

$$\Phi_{mn}(t)|_{t=0} = 0,$$
(4.24)

где

$$\Phi_{mn}(t) = \int_0^{h_1} \psi_{1mn}(z) \cdot u_{1mn}(z, t) dz + \int_{h_1}^H \psi_{2mn}(z) \cdot u_{2mn}(z, t) dz$$

$$B_{mn} = m_0^{-1} \mu^{-1} \beta_{жс}^{-1} C_{mn} \left[\frac{q_1}{\mu_{1mn}} \sin(\mu_{1mn} b_1) + \frac{2q_2}{\mu_{2mn}} \cdot \frac{\cos(\mu_{1mn} h_1)}{\cos(\mu_{2mn} h_2)} \times \right.$$

$$\left. \times \cos \mu_{2mn} (h_2 - \frac{b_2}{2}) \sin \frac{\mu_{2mn} b_2}{2} \right],$$

$$a = \frac{m_1}{\beta_{жс}}.$$

Используя преобразование Лапласа, получим решение задачи (4.23)-(4.24) в классе изображений в виде:

$$\bar{\Phi}_{mn}(s) = B_m \frac{S + \gamma}{S(S^2 + a_{mn} S + b_{mn})},$$
(4.25)

где

$$a_{mn} = a + \lambda_{mn} + \gamma,$$

$$b_{mn} = \lambda_{mn}\gamma,$$

$$\bar{\Phi}_{mn}(s) = \int_0^{\infty} \Phi_{mn}(t)e^{-St} dt,$$

S – параметр преобразования Лапласа, $Res > 0$. Используя обратное преобразование Лапласа, из (4.25) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(t) = B_{mn} & \left[\frac{\gamma}{S_{1mn} \cdot S_{2mn}} + \frac{S_{1mn} + \gamma}{S_{1mn}(S_{1mn} - S_{2mn})} \exp(S_{1mn}t) + \right. \\ & \left. + \frac{S_{2mn} + \gamma}{S_{2mn}(S_{2mn} - S_{1mn})} \exp(S_{2mn}t) \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь

$$S_{jmn} = \frac{-a_{mn} + (-1)^j \sqrt{a_{mn}^2 - 4b_{mn}}}{2} \quad (j = 1, 2)$$

При помощи обратного преобразования Ханкеля и Гринберга решение поставленной задачи находится в виде:

$$u_j(r, z, t) = \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ B_{on} \left[\frac{\gamma}{b_{on}} + (a_{on}^2 - 4b_{on})^{\frac{1}{2}} \left(\left(1 + \frac{\gamma}{S_{2on}} \right) \exp(S_{2on}t) - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(1 + \frac{\gamma}{S_{1on}} \right) \exp(S_{1on} t) \Big] \Psi_{jon}(z) + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ B_{mn} \left[\frac{\gamma}{b_{mn}} + (a_{mn}^2 - 4b_{mn})^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\gamma}{S_{2mn}} \right) \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \exp(S_{2mn} t) - \left(1 + \frac{\gamma}{S_{1mn}} \right) \exp(S_{1mn} t) \right] \frac{J_0(\lambda_m r)}{J_0^2(\lambda_m R)} \Psi_{jmn}(z) \right. \\
 & \left. (j = 1, 2) \right. .
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Выражение (4.27) представляет собой разложение функции $U_j(r, z, t)$ в ряд по собственным функциям.

Для упругого режима, т.е. когда $m_l=0$, $\gamma = \infty$ из решения (4.27) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 u_j(r, z, t) = & \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_{on}}{\lambda_{on}} [1 - \exp(-\lambda_{on} t)] \Psi_{jon}(z) + \right. \\
 & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_{mn}}{\lambda_{mn}} [1 - \exp(-\lambda_{mn} t)] \Psi_{jmn}(z) \frac{J_0(\lambda_m r)}{J_0^2(\lambda_m R)} \right. \right. \\
 & \left. \left. (j = 1, 2) \right. \right. .
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

При $k_1=k_2=k$ из формулы (4.27) получается формула (4.9), т.е. результаты, соответствующие однородному пластику.

4.4. Решение интегро-дифференциального уравнения фильтрации с учетом ползучести в анизотропной среде

В данном параграфе решается интегро-дифференциальное уравнение фильтрации жидкости в анизотропных ползучих средах.

Пусть фильтрационная область D состоит из двух областей $D_1, D_2, D=D_1 \cup D_2$, которые снаружи и внутри ограничены цилиндрическими поверхностями. Между областями D_1 и D_2 существуют слабопроницаемые перемычки. Искомая функция давления $P_j(r, \theta, z, t)$ ($j=1,2$) имеет в точках (r_{ijk}, θ_{ijk}) конечное число логарифмических особенностей. С помощью обобщенных функций данная задача имеет следующую математическую постановку:

Найти в области

$$D_1 = \{R_1 \leq r \leq R_2; 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq z \leq b_1\},$$

$$D_2 = \{R_1 \leq r \leq R_2; 0 \leq \theta \leq \infty; b_1 + b_n \leq z \leq b\}$$

решение системы интегро-дифференциальных уравнений типа свертки

$$\begin{aligned} & k_{jr} \frac{\partial^2 P_j(r, \theta, z, t)}{\partial r^2} + k_{jr} \frac{1}{r} \frac{\partial \beta_j(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \\ & + k_{jz} \frac{\partial^2 P_j(r, \theta, z, t)}{\partial z^2} + k_{j\theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P_j(r, \theta, r, t)}{\partial \theta^2} + \\ & + \frac{\mu}{2\pi r} \sum_{i=1}^{M_i} \sum_{k=1}^{N_i} \frac{q_{ijk}(t)}{h_{ijk}} \delta(r-r_{ijk}, \theta-\theta_{ijk}) [\sigma(z-b_{j-1}) - \sigma(z-b_{j-1}-h_{ijk})] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times [\sigma(t-t_{j-1,j}) - \sigma(t-t_{i,j})] &= \frac{1}{\chi} \frac{\partial P_j(r, \theta, z, t)}{\partial t} + \\ &+ \frac{\delta_1}{\mathcal{B}_{\text{жс}}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{2}} P_j(r, \theta, z, t) dt \end{aligned} \quad (4.29)$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$\begin{aligned} P_j(r, \theta, z, t) \Big|_{t=0} &= 0 \\ (R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq b_1 | z \in D_1 \quad b_1 + b_n \leq z \leq b | z \in D_2) \\ \frac{\partial P_1(r, \theta, z, t)}{\partial r} \Big|_{z=R_1} &= f_1(\theta, z, t) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq b_1, 0 \leq t < +\infty) \\ \frac{\partial P_2(r, \theta, z, t)}{\partial r} \Big|_{z=R_2} &= f_2(\theta, z, t) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, b_1 + b_n \leq z \leq b_1, 0 \leq t < +\infty) \\ \frac{\partial P_1(r, \theta, z, t)}{\partial r} \Big|_{z=R_2} &= \varphi_1(\theta, z, t) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq b_1, 0 \leq t < +\infty) \\ \frac{\partial P_2(r, \theta, z, t)}{\partial r} \Big|_{z=R_2} &= \varphi_2(\theta, z, t) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, b_1 + b_n \leq z \leq b_1, 0 \leq t < +\infty) \\ \frac{\partial P_1(r, \theta, z, t)}{\partial r} \Big|_{z=0} &= \psi_1(r, \theta, t) \quad (R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t < +\infty) \\ \frac{\partial P_2(r, \theta, z, t)}{\partial r} \Big|_{z=b} &= \psi_2(r, \theta, t) \quad (R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t < +\infty) \end{aligned}$$

На общих границах зон имеем условия:

$$\left. \frac{\partial P_1(r, \theta, z, t)}{\partial z} \right|_{z=b_1} = \alpha_1 \left[P_2(r, \theta, z, t) \Big|_{z=b_1+b_2} - P_1(r, \theta, z, t) \Big|_{z=b_1} \right] \quad (4.30)$$

$$(R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t < +\infty)$$

$$\left. \frac{\partial P_2(r, \theta, z, t)}{\partial z} \right|_{z=b_1+b_n} = \alpha_2 \left[P_2(r, \theta, z, t) \Big|_{z=b_1+b_n} - P_1(r, \theta, z, t) \Big|_{z=b_1} \right] \quad (4.31)$$

$$(R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t < +\infty).$$

На функции $P_j(r, \theta, z, t)$ по аргументу θ задается условие периодичности

$$P_j(r, \theta + 2\pi, z, t) = P_j(r, \theta, z, t) \quad (j = 1, 2) \quad (4.32)$$

$$(R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq z \leq b_1 \\ | z \in D, b_1 + b_n \leq z \leq b, | z \in D, 0 \leq t < +\infty).$$

Здесь

$$\alpha_j = \frac{K_n}{K_{jz} b_n} \quad (j = 1, 2);$$

$$b = b_1 + b_2 + b_n;$$

$$\chi = \mu_0^{-1} \beta_m^{-1};$$

k_n, b_n – проницаемость и мощность перемычки.

δ_1 – параметр ползучести; в $[t_{i-1,j}, t_{i,j}]$ промежутке времени, в котором действуют источники (стоки);

$P_j(r, \theta, z, t) = P_0 - \bar{P}_j(r, \theta, z, t)$, P_0 – начальное давление;

$P_j(r, \theta, z, t)$ – текущее давление в j -ом пласте ($j = 1, 2$);

$\frac{\delta_1}{\sqrt{t}}$ – ядро Абеля;

$\delta(r, \theta)$ – дельта – функция Дирака;

$\sigma(z, t)$ – единичная функция Хевисайда;

$q_{ijk}(t)$ – дебит k -ой скважины в j -ой зоне в соответствующий промежуток времени;

b_1, b_2 – соответственно, мощность верхнего и нижнего пластов;

h_{jk} – глубина вскрытия k -ой скважины в j -м пласте;

R_1, R_2 – расстояние от начала координат до наружной и внутренней поверхностей, соответственно;

μ_0 – динамическая вязкость жидкости;

β_m – коэффициент сжимаемости жидкости; m – пористость пласта;

M_j – сумма промежутков времени в j -ой зоне, в которых действуют источники (стоки);

N_j – число скважин в j -ой зоне;

На функции $f_i(\theta, z, t)$ и $\varphi_j(\theta, z, t)$ ($j = 1, 2$) налагаются условия, абсолютного интегрирования по переменным (θ, z) и непрерывного дифференцирования по аргументу t .

Для решения поставленной задачи (4.29) – (4.32) применяем конечное синус-преобразование Фурье по переменной θ с ядром $\sin \theta$ и конечное преобразование Ханкеля [3], учитывая свойства дельта-функции Дирака, получаем:

$$\begin{aligned}
 & K_{jz} \frac{\partial^2 P_{jmn}(z,t)}{\partial z^2} - K_{jr} \lambda_{mn}^2 P_{jmn}(z,t) + F_{jmn}(z,t) = \\
 & = \frac{1}{\chi} \frac{\partial P_{jmn}(z,t)}{\partial t} + \frac{\delta_1}{\chi \beta_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t-r)^{\frac{1}{2}} P_{jmn}(z,\tau z) \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

$$P_{jmn}(z,t)|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq z \leq b_1 / z \in D_1, b_1 + b_n \leq z \leq b / z \in D_2),$$

$$\left. \frac{\partial P_{1mn}(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0} = \psi_{1mn}(t),$$

$$\left. \frac{\partial P_{2mn}(z,t)}{\partial z} \right|_{z=b} = \psi_{2mn}(t) \quad (0 \leq t < +\infty)$$

$$\left. \frac{\partial P_{1mn}(z,t)}{\partial z} \right|_{z=b_1} = \alpha_1 \left[P_{2mn}(z,t) \Big|_{z=b_1+b_n} - P_{1mn}(z,t) \Big|_{z=b_1} \right] \quad (0 \leq t < +\infty) \quad (4.34)$$

$$\left. \frac{\partial P_{2mn}(z,t)}{\partial z} \right|_{z=b_1+b_n} = \alpha_2 \left[P_{2mn}(z,t) \Big|_{z=b_1+b_n} - P_{1mn}(z,t) \Big|_{z=b_1+b_n} \right].$$

Ядро преобразования Ханкеля $V_{mn}(\lambda_{mn}r)$ имеет вид:

$$V_m(\lambda_{mn}r) = \frac{\pi}{2} \left[J_m(\lambda_{mn}r) \cdot \frac{Y'_m(\lambda_{mn}R_1)}{J'_m(\lambda_{mn}R_1)} - Y_m(\lambda_{mn}r) \right] \quad (4.35)$$

λ_{mn} — является корнем характеристического уравнения,

$$\begin{aligned}
 & J_{m+1}(\lambda_{mn}R_1) \cdot Y_{m+1}(\lambda_{mn}R_2) - \\
 & - Y_{m+1}(\lambda_{mn}R_1) \cdot J_{m+1}(\lambda_{mn}R_2) = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

J_m, Y_m – функции Бесселя m -го порядка первого и второго рода, где

$$\begin{aligned}
 F_{jmn}(z, t) &= \frac{\mu}{2\pi} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{k=1}^{N_j} \left\{ \frac{q_{ijk}(t)}{h_{jk}} \sin(m\theta_{ijk}) V_m(\lambda_{mn}r_{ijk}) \times \right. \\
 & \times [\sigma(z - b_{j-1}) - \sigma(z - b_{j-1} - h_{jk})] [\sigma(t - t_{i-1,j}) - \sigma(t - t_{i,j})] \Big\} + \\
 & + K_{jr} [R_2 \varphi_{jm}(z, t) V_m(\lambda_{mn}R_2) - R_1 f_{jm}(z, t) V_m(\lambda_{mn}R_1)], \\
 \psi_{jmn}(t) &= \int_0^{2\pi R_2} \int_{R_1} \psi_j(r, \theta, t) r V_m(\lambda_{mn}r) \sin(m\theta) d\theta dr, \\
 f_{jm}(z, t) &= \int_0^{2\pi} f_j(\theta, z, t) \sin(m\theta) d\theta, \\
 \varphi_{jmn}(z, t) &= \int_0^{2\pi} \varphi_j(\theta, z, t) \sin(m\theta) d\theta \quad (j=1,2) \quad (m=1,2,\dots)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим совокупность собственных функций $U_{jmnv}(z)$ ($j=1,2$), удовлетворяющих уравнению

$$\frac{d^2 U_{jmnv}(z)}{dz^2} + \left(\frac{\lambda_{mnv}}{\chi K_{jz}} - \frac{K_{jr}}{K_{jz}} \lambda_{mn}^2 \right) U_{jmnv}(z) = 0 \quad (4.37)$$

и граничным условиям

$$U_{1mnv}(z)|_{z=0} = 0,$$

$$U_{1mnv}(z) = \alpha_1 \left[U_{2mnv}(z)|_{z=b_1+b_n} - U_{1mnv}(z)|_{z=b_1} \right], \quad (4.38)$$

$$U_{2mnv}(z)|_{z=b} = 0,$$

$$U_{2mnv}(z)|_{z=b_1+b_n} = \alpha_2 \left[U_{2mnv}(z)|_{z=b_1+b_n} - U_{1mnv}(z)|_{z=b_1} \right]$$

Предполагается, что $P_{jmn}(z, t)$ допускает разложение в ряд по фундаментальным функциям $U_{jmnv}(z)$ однородной задачи. Решение задачи (4.37) – (4.38) имеет вид:

$$U_{1mnv}(z) = A_{1mnv} \cos \mu_{1mnv} z, \quad (4.39)$$

$$U_{2mnv}(z) = A_{1mnv} \cdot B_{mnv} \cos(\mu_{2mnv}(b - z)),$$

где

$$B_{mn} = \frac{\alpha_2 \cos(\mu_{1mnv} b_1)}{\alpha_2 \cos(\mu_{2mnv} b_2) - \mu_{2mnv} \cdot \sin(\mu_{2mnv} b_2)};$$

$$\mu_{jmnv} = \frac{1}{K_j z} \left(\frac{\lambda_{mnv}}{\chi} - K_{jr} \lambda_{mn}^2 \right).$$

Собственные числа μ_{jmnv} ($j=1,2$), соответствующие задаче Штурма-Лидвия, определяются из следующих трансцендентных систем уравнений

$$\begin{cases} \mu_{1mnv} \mu_{2mnv} \operatorname{tg}(\mu_{1mnv} b_1) \operatorname{tg}(\mu_{2mnv} b_2) = \\ = \alpha_1 \mu_{2mnv} \operatorname{tg}(\mu_{2mnv} b_2) + \alpha_2 \mu_{1mnv} \operatorname{tg}(\mu_{1mnv} b_1) \\ K_{1r} \lambda_{mn}^2 + K_{1z} \mu_{1mnv}^2 = K_{2r} \lambda_{mn}^2 + K_{2z} \mu_{2mnv}^2 \end{cases} \quad (4.40)$$

A_{1mnv} – определяется из условия нормировки функции $U_{1mnv}(z)$ и $U_{2mnv}(r)$ в области D_1 и D_2 в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_{1mnv} = \sqrt{2\chi} \left\{ K_{1z} \left[b_1 + \frac{\sin(2\mu_{1mnv} b_1)}{2\mu_{1mnv}} \right] + \right. \\ \left. + K_{2z} \cdot B_{mnv}^2 \left[b_2 + \frac{\sin(2\mu_{2mnv} b_2)}{2\mu_{2mnv}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Применяя к задаче (4.33) – (4.34) метод собственных функций Г.А.Гринберга [4], учитывая свойства дельта функции Дирака, получим задачу типа Коши:

$$\frac{d\phi_{mnv}(t)}{dt} + a \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\phi_{mnv}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \lambda_{mnv} \phi_{mnv}(t) = F_{mnv}(t) \quad (4.41)$$

$$\phi_{mnv}(0) = 0, \quad (4.42)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_{mnv}(t) = & \int_0^{b_1} P_{1mnv}(z, t) \cdot U_{1mnv}(z) dz + \\ & + \int_{b_1+b_n}^{b_1} P_{2mnv}(z, t) \cdot U_{2mnv}(z) dz, \quad a = \frac{\delta_1}{\beta_m}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$F_{mnv}(t) = A_{1mn} \chi [\chi_{2z} \psi_{2mn}(t) \cdot B_{mnv} - \chi_{1z} \psi_{1mn}(t)] + \chi [\eta_{1mnv}(t) + \eta_{2mnv}(t)]$$

$$\eta_{1mnv}(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} A_{1mnv} \cdot \frac{\chi_{1z}}{\mu_{1mnv}} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_1} \left\{ \frac{q_{i1k}(t)}{h_{1k}} \sin(m\theta_{i1k}) \cdot V_m(\lambda_{mn} r_{i1k}) \times \right.$$

$$\left. \times \sin(\mu_{1mnv} h_{1k}) [\sigma(t - t_{i-1,1}) - \sigma(t - t_{i,1})] \right\} +$$

$$+ K_{1r} \chi_{1z} \int_0^{b_1} [R_2 \varphi_{1m}(z, t) \cdot V_m(\lambda_{mn} R_2) - R_1 f_{1m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_1)] \cdot U_{1mnv}(z) dz$$

$$\eta_{2mnv}(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} A_{1mnv} B_{mnv} \times$$

$$\times \frac{\chi_{2z}}{\mu_{2mnv}} \sum_{i=1}^{M_2} \sum_{k=1}^{N_2} \left\{ \frac{q_{i2k}(t)}{h_{2k}} \sin(m\theta_{i2k}) \cdot V_{mn}(\lambda_{mn} r_{i2k}) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \sin\left(\frac{h_{2k}}{2} \mu_{2mny}\right) \cdot \cos\left(\mu_{2mny} \left(b_2 - \frac{h_{2k}}{2}\right)\right) \times \\ & \times \left[\sigma(t-t_{i-1,2}) - \sigma(t-t_{i,2})\right] \} + K_{2r} \cdot \chi_{2z} \times \\ & \times \int_{b_1+b_n}^b [R_2 \varphi_{2m}(z,t) V_m(\lambda_{mn} R_2) - R_1 f_{2m}(z,t) V_{mn}(\lambda_{mn} R_1)] U_{2mny}(z) dz, \end{aligned}$$

$$\chi_{jz} = \chi \cdot K_{jz} \quad (j=1,2)$$

Используя преобразование Лапласа и учитывая свойства единичной функции Хевисайда, получим решение задачи (4.41) – (4.42) в классе изображений в виде:

$$\bar{\phi}_{mny}(s) = \frac{\bar{F}_{mny}(s)}{s + a\sqrt{\pi} \sqrt{s} + \lambda_{mny}}. \quad (4.44)$$

Здесь

$$\bar{\phi}_{mny}(s) = \int_0^{\infty} \phi_{mny}(t) e^{-st} dt, \quad (4.45)$$

$$\bar{F}_{mny}(s) = \int_0^{\infty} F_{mny}(t) e^{-st} dt$$

$$\eta_{jmn}(s) = \int_0^{\infty} \eta_{jmn}(t) e^{-st} dt, \quad (j=1,2)$$

$$\psi_{jmn}(s) = \int_0^{\infty} \psi_{jmn}(t) e^{-st} dt \quad (j=1,2)$$

$$\begin{aligned} \eta_{1mnv}(s) &= \frac{\mu_0}{2\pi} A_{1mnv} \cdot \frac{\chi_{1z}}{\mu_{1mnv}} \times \\ &\times \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_1} \left[\frac{V_m(\lambda_{mn} r_{i1k})}{h_{1k}} \sin(m\theta_{i1k}) \cdot \int_{t_{i-1,1}}^{t_{i,1}} q_{i1k}(t) e^{-st} dt \right] + K_{1r} \cdot \chi_{1z} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{b_1} [R_2 \varphi_{1m}(z, t) \cdot V_m(\lambda_{mn} R_2) - R_1 f_{1m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_1)] U_{1mnv}(z) dz \right\} e^{-st} dt \\ \eta_{2mnv}(s) &= \frac{\mu_0}{\pi} A_{1mnv} \cdot B_{mnv} \frac{\chi_{2z}}{\mu_{2mnv}} \sum_{i=1}^{M_2} \sum_{k=1}^{N_2} \left[\frac{V_m(\lambda_{mn} r_{i2k})}{h_{2k}} \sin(m\theta_{i2k}) \times \right. \\ &\times \left. \sin\left(\frac{h_{2k}}{2} \mu_{2mnv}\right) \cos\left(\mu_{2mnv} \left(b_2 - \frac{h_{2k}}{2}\right)\right) \int_{t_{i-1,2}}^{t_{i,2}} q_{i2k}(t) e^{-st} dt \right] + K_{2r} \cdot \chi_{2z} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \left\{ \int_{b_1+b_n}^b [R_2 \varphi_{2m}(z, t) V_{mn}(\lambda_{mn} R_2) - R_1 f_{2m}(z, t) V_{mn}(\lambda_{mn} R_1)] U_{2mnv}(z) dz \right\} e^{-st} dt \end{aligned}$$

S - параметр преобразования Лапласа, $\text{Res} > 0$.

Применяя обратное преобразование Лапласа, теорема о свертке к (4.44) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \phi_{mnv}(t) = & \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 - 4\lambda_{mnv}}} \times \\ & \times \int_0^t F_{mnv}(t-\tau) [\gamma_{mnv} \exp(\gamma_{mnv}^2 \tau) \operatorname{erfc}(\gamma_{mnv} \sqrt{\tau}) - \\ & - \alpha_{mnv} \exp(\alpha_{mnv}^2 \tau) \operatorname{erfc}(\alpha_{mnv} \sqrt{\tau})] d\tau \end{aligned} \quad (4.46)$$

Здесь

$$\alpha_{mnv} = \frac{a\sqrt{\pi}}{2} - \sqrt{\frac{\pi a^2}{4} \lambda_{mnv}},$$

$$\gamma_{mnv} = \frac{a\sqrt{\pi}}{2} + \sqrt{\frac{\pi a^2}{4} \lambda_{mnv}}.$$

$$\operatorname{erfc}x = 1 - \operatorname{erfx},$$

$$\operatorname{erfc}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-z^2) dz,$$

$$\operatorname{erfx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz,$$

erfx – функция ошибок Гаусса.

При помощи обратного преобразования Фурье, Гринберга и Ханкеля, получим решение задачи (4.29) – (4.32) в виде

$$P_j(r, \theta, z, t) = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\lambda_{mn}^2 \frac{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})}{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) - J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})} \times \right. \\ \left. \times V_m(\lambda_{mn} r) \cdot \phi_{mnv}(t) \cdot U_{jmnv}(z) \sin(m\theta) \right], \quad (j=1,2). \quad (4.47)$$

Рассмотрим поведение решения поставленной выше задачи (4.29) – (4.32) для однородных начальных и граничных условий. В этом случае задачи (4.29) – (4.32) при $M_1 = M_2 = 1$,

$q_{i1k} = q_1, q_{i2k} = q_2, h_{i1k} = h_1, h_{i2k} = h_2$ имеют вид:

$$P_j(r, \theta, z, t) = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \left[\lambda_{mn}^2 \frac{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})}{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) - J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})} \times \right. \\ \left. \times V_m(\lambda_{mn} r) \cdot \phi_{mnv}^*(t) \cdot U_{jmnv}(z) \sin(m\theta) \right], \quad (j=1,2),$$

где

$$\phi_{mnv}^*(t) = \frac{\eta_{mnv}}{\sqrt{\pi \alpha^2 - 4 \lambda_{mnv}}} \left[\frac{\lambda_{mnv}}{\sqrt{\pi \alpha^2 - 4 \lambda_{mnv}}} + \frac{1}{\gamma_{mnv}} \exp(\gamma_{mnv}^2 t) \operatorname{erfc} \gamma_{mnv} t - \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \lambda_{mnv}} \exp(\alpha_{mnv}^2 t) \operatorname{erfc}(\alpha_{mnv} \sqrt{t}) \right] \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \eta_{mnv} = & A_{1mnv} \mu_0 \left[\frac{q_1 \chi_{1z}}{2\pi h_1 \mu_{1mnv}} V_m(\lambda_{mn} r_1) \sin(\mu_{1mn} h_1) \sin(m\theta_1) + \right. \\ & + \frac{\chi_{2z} q_2}{\pi h_2 \mu_{2mnv}} B_{mnv} V_m(\lambda_{mn} r_2) \cdot x \cdot \sin\left(\frac{h_2}{2} \mu_{2mn}\right) \times \\ & \left. \times \cos\left(\mu_{2mn} \left(b_2 - \frac{h_2}{2}\right)\right) \sin(m\theta_2) \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Из полученных решений (4.47), принимая $r = r_j = r_0$, $\theta = \theta_j$ ($j = 1, 2$) для однородных начальных и граничных условий после некоторых преобразований для усредненной по вскрываемой части пласта скважины находим значение безразмерное перепада давления:

$$\begin{aligned} \Delta P_{jc}(t) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \left[\lambda_{mn}^2 \frac{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) \cdot J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})}{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) - J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})} \times \right. \\ & \left. \times V_m(\lambda_{mn}(r_j + r_c)) \cdot \bar{\phi}_{mnv}(t) \cdot C_{jmnv} \cdot \sin(m\theta) \right] \quad (j = 1, 2), \quad (4.50) \end{aligned}$$

где

$$\Delta P_{jc}(t) = \frac{K_0 h_0 [P_0 - P_j(r_j + r_c, \theta_j, t)]}{\mu q_0}$$

$$C_{1mnv} = \frac{A_{1mnv}}{h_1 \mu_{1mnv}} \sin(\mu_{1mnv} h_1),$$

$$C_{2mnv} = 2 \frac{A_{1mnv} \cdot B_{mnv}}{\mu_{2mnv} h_2} \sin\left(\frac{h_2}{2} \mu_{2mnv}\right) \cdot \cos\left(\mu_{2mnv} \left(b_2 - \frac{h_2}{2}\right)\right)$$

$$\bar{\phi}_{mnv}^{(t)} = V_{mnv} \left[\frac{\lambda_{mnv}}{\sqrt{\pi\alpha^2 - 4\lambda_{mnv}}} + \frac{1}{\gamma_{mnv}} \exp(\gamma_{mnv}^2 t) \operatorname{erfc}(\gamma_{mnv} \sqrt{t}) - \frac{1}{\gamma_{mnv}} \exp(\gamma_{mnv}^2 t) \operatorname{erfc}(\gamma_{mnv} \sqrt{t}) \right]$$

$$V_{mnv} = \frac{K_0 h_0}{\sqrt{\pi\alpha^2 - 4\lambda_{mnv}}} \left[C_{1mnv} \bar{q}_1 \chi_{1z} V_m(\lambda_{mn} r_1) \sin(m\theta_1) + \frac{\bar{q}_2 \chi_{2z}}{2} C_{2mnv} V_m U_{2mn} \cdot \sin(m\theta_2) \right],$$

$$\bar{q}_j = \frac{\tau_j}{q_0}, \quad (j=1,2).$$

Для упругого режима решение вышеуказанной задачи (4.50) получается в следующем виде:

$$\Delta P_{jc}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \left[2 \frac{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) \cdot J_{m+1}(R_2 \lambda_{mn})}{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) - J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})} \times \right. \\ \left. \times V_m(\lambda_{mn}(r_i + r_c)) \cdot \phi_{mnv}^{(1)}(t) \cdot C_{jmnv} \cdot \sin(m\theta) \right], \quad (j=1,2) \quad (4.51)$$

$$\phi_{mnv}^{(1)}(t) = \bar{V}_{mnv} \frac{1}{\lambda_{mnv}} (1 - e^{-\lambda_{mnv} t}),$$

где

$$\bar{V}_{mnv} = K_0 h_0 \left[\bar{q}_1 \chi_{1z} C_{1mn} V_m(\lambda_{mn} r_1) \sin(m\theta_1) + \right. \\ \left. + \frac{\bar{q}_2}{2} \chi_{2z} \cdot C_{2mnv} V_{mn}(\lambda_{mn} r_2) \sin(m\theta_2) \right]$$

Проведение теоретических и численных исследований показывает, что ряды, входящие в (4.50) – (4.51), достаточно быстро сходятся. Поэтому для практического использования можно ограничиться несколькими членами этого ряда.

4.5. О нестационарном движении жидкости к скважинам в изолированных пластах с учетом ползучести сред

Деформационным свойствам коллектора при движении в нем жидкости и газа посвящено очень много работ.

При движении жидкости и газа к скважинам в пористой среде необходимо учитывать реологические свойства горных пород. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что деформационные свойства горных пород существенно влияют на характеристики течения жидкости и газа в пористой среде [21, 28, 56, 65, 66, 88 и др.]. Задача фильтрации жидкости и газа к совершенным скважинам с учетом ползучести среды для однородного осесимметричного случая рассмотрена в [46].

Ниже рассматривается задача о фильтрации жидкости к системе скважин в двух изолированных друг от друга полосообразных пластах.

Предложим, что в прямоугольной области каждый пласт состоит из N кусочно-однородных зон. Каждая зона разрабатывается M_j ($j = \overline{1, N}$) скважинами, которые распо-

ложены в точках (x_{ijv}, y_{ijv}) и на контуре, ограничивающем область и удовлетворяет граничным условиям первого рода.

Процесс нестационарной фильтрации жидкости описывается следующими интегро-дифференциальными уравнениями типа свертки:

$$\begin{aligned} \Delta U_{ij}(x, y, t) + F_{ij}(x, y) &= \frac{1}{\chi_{ij}} \frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + \\ &+ \frac{1}{\chi_{ij} \beta_{эс}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t-\tau) U_{ij} d\tau, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$(i = 1, 2; \quad j = \overline{1, N})$$

Здесь Δ двухмерный оператор Лапласа; $U_{ij}(x, y, t) = P_0 - P_{ij}(x, y, t)$, $P_{ij}(x, y, t)$ - давление в точке (x, y) j -й зоны i -го пласта в момент времени t ; $F_{ij}(x, y, t)$ - функции, характеризующие наличие точечных источников (стоков); $R(t)$ - обобщенное ядро ползучести.

Рассмотрим уравнение (4.52) совместно с некоторым режимом разработки пласта. На внешних границах пласта зададим условия первого рода.

$$\begin{aligned} U_{ij}(x, y, t) \Big|_{x=0, L} &= f_i(y, t) \quad (0 \leq y \leq H, \quad t < +\infty); \\ U_{ij}(x, y, t) \Big|_{y=0, H} &= \varphi_i(x, t) \quad (0 \leq x \leq L, \quad t < +\infty) \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$(i = 1, 2; \quad j = \overline{1, N})$$

На общих границах зон неоднородности имеет место условия сопряжения

$$U_{ij}(x, h_j - 0, t) = U_{i,j+1}(x, h_j + 0, t),$$

$$K_{ij} \frac{\partial U_{ij}(x, h_j - 0, t)}{\partial y} = K_{i,j+1} \frac{\partial U_{i,j+1}(x, h_j + 0, t)}{\partial y} \quad (4.54)$$

$$(j = \overline{1, N-1}, i = 1, 2)$$

Зададим начальные условия распределения давления в каждой зоне в момент времени

$$t = 0, U_{ij}(x, y, 0) = 0. \quad (4.55)$$

На дебиты и забойные давления скважин налагаются следующие условия:

$$\begin{cases} q_{ijv} + q_{c,jv} = Q_{jv} \\ U_{c,jv} = U_{c2jv} \end{cases} \quad (j = \overline{1, N}) \quad (4.56)$$

где b_i - мощность пласта; H, L - ширина и длина пласта; q_{ijv} - дебит v -ой скважины, работающей в j -й зоне i -го пласта; Q_{jv} - заданный суммарный дебит v -й скважины и j -й зоне; M_j - число скважин в j -й зоне; $P_{c,jv}$ - давление на забое скважины; K_{ij} - фильтрационные параметры i -го пласта j -й зоны.

$$F_{ij}(x, y) = \frac{\mu}{K_{ij} b_i} \sum_{v=1}^{M_j} Q_{ijv} \delta(x - x_{ijv}, y - y_{ijv}),$$

$$\chi_{ij} = K_{ij} \mu_0^{-1} m_0^{-1} \beta_m \quad (1, 2; j = \overline{1, N}),$$

Применяя для решения поставленной задачи (4.52)-(4.56) конечное синус преобразование Фурье по переменной x с ядром $\sin \lambda_m x$, учитывая свойства дельта-функции Дирака, получим:

$$\frac{\partial^2 U_{ijm}}{\partial y^2} - \lambda_m^2 U_{ijm} + F_{ijm}(y, t) = \frac{1}{\chi_{ij}} \frac{\partial U_{ijm}}{\partial t} + \frac{1}{\chi_{ij} \beta_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t - \tau) U_{ijm} d\tau,$$

$$U_{ijm}(y, t) \Big|_{y=0; H} = \varphi_{im}(t), \quad U_{ijm}(h_j - 0, t) = U_{i, j+1, m}(h_j + 0, t), \quad (4.57)$$

$$K_{ij} \frac{\partial}{\partial y} U_{ijm}(h - 0, t) = K_{i, j+1} \frac{\partial}{\partial y} U_{i, j+1, m}(h_j + 0, t) \quad (4.58)$$

$$(i = 1, 2; j = 1, \overline{N-1})$$

где

$$\lambda_m = \frac{\pi m}{L}, \quad U_{ijm}(y, t) = \int_0^L U_{ij}(x, y, t) \sin \lambda_m x dx,$$

$$\varphi_{im}(t) = \int_0^L \varphi_i(x, t) \sin \lambda_m x dx, \quad F_{ijm}(y, t) = \lambda_m f_1(y, t) - \lambda_m^2 f_2(y, t) +$$

$$+ \frac{\mu}{b_i K_{ij}} \sum_{v=1}^{M_j} Q_{ijv} \delta(y - y_{ijv}) \sin \lambda_m x_{ijv} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Рассмотрим совокупность собственных функций $\Psi_{ijmn}(y)$ ($j = \overline{1, N}$), удовлетворяющих уравнению

$$\frac{d^2}{dy^2} \Psi_{ijmn}(y) + \left(\frac{\lambda_{mn}}{\chi_{ij}} - \lambda_m^2 \right) \Psi_{ijmn} = 0 \quad (4.59)$$

и условия сопряжения

$$\begin{aligned} \psi_{ijmn}(h_j - 0) &= \psi_{i,j+1,mn}(h_j + 0), \\ K_{ij} \frac{\partial}{\partial y} U_{ijmn}(h_j - 0) &= K_{i(j+1)} \frac{\partial}{\partial y} U_{i(j+1)mn}(h_j + 0) \quad (4.60) \\ (j &= \overline{1, N-1}) \end{aligned}$$

Здесь λ_{mn} - собственные значения соответствующей задачи (4.58)-(4.60) Штурма-Лиувилля. Функции $\psi_{ijmn}(y)$ на концах интервала удовлетворяют следующим однородным граничным условиям:

$$\psi_{ijmn}(0) = \psi_{ijmn}(H) = 0 \quad (i = 1, 2; j = \overline{1, N}). \quad (4.61)$$

Применяя к задаче (4.57)-(4.58) метод собственных функций Г.А.Гринберга [3], получим задачу типа Коши:

$$\begin{aligned} a \frac{d}{dt} \Phi_{imn}(t) + b \frac{d}{dt} \int_0^t R(t-\tau) \Phi_{imn}(\tau) d\tau = \\ (4.62) \\ = -a\lambda_{mn} \Phi_{imn}(t) + V_{imn}(t) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_{imn}(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{h_j}^{h_{j+1}} U_{ijn}(y, t) \psi_{ijmn}(y) dy, \\ V_{imn}(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{h_j}^{h_{j+1}} F_{ijn}(y, t) \psi_{ijmn}(y) dy, \\ a &= \mu_0 m_0 \beta_{жс}, \quad b = m_0 \mu_0. \end{aligned}$$

Начальное условие для уравнения (4.62) имеет вид

$$\Phi_{imn}(0) = 0. \quad (4.63)$$

Решение задачи (4.62)-(4.63) после применения преобразования Лапласа получим в классе изображений в виде:

$$\Phi_{imn}(s) = \frac{V_{imn}(s)}{as + bsR(s) + a\lambda_{mn}}. \quad (4.64)$$

Пусть ядро ползучести представляется в виде ядра Абеля

$$R(t) = \frac{\delta_1}{\sqrt{t - \tau}}.$$

Тогда из (4.64) получим

$$\Phi_{imn}(s) = \frac{1}{a(\eta_{mn} - \theta_{mn})} V_{imn}(s) \left(\frac{1}{\sqrt{s + \theta_{mn}}} - \frac{1}{\sqrt{s + \eta_{mn}}} \right). \quad (4.65)$$

Здесь

$$\eta_{mn} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4\lambda_{mn}}}{2}, \quad \theta_{mn} = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4\lambda_{mn}}}{2}, \quad c = \frac{\delta_1 \sqrt{\pi}}{\beta_{ж}},$$

где δ_1 - параметр ползучести.

Применяя теорему о свертке к (4.65), будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi_{imn}(t) = & \frac{1}{a(\eta_{mn} - \theta_{mn})} \int_0^t V_{imn}(t - \tau) \times \\ & \times \left[\eta_{mn} \exp(\eta^2 \tau) \operatorname{erfc}(\eta_{mn}^2 \sqrt{\tau}) - \theta_{mn} \exp(\theta_{mn}^2 \tau) \operatorname{erfc}(\theta_{mn}^2 \sqrt{\tau}) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Предполагая, что $U_{ij}(x, y, t)$ допускает разложение в ряд по фундаментальным функциям $\psi_{ijmn}(y)$ однородной задачи и используя обратные преобразования Фурье и Гринберга, находим решение поставленной задачи в виде:

$$U_{ij}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{imn}(t) \psi_{ijmn}(y) \sin \frac{\pi m}{L} x. \quad (4.67)$$

После определения вида функции $U_{ij}(x, y, t)$ используя условия (4.56), можно найти неизвестные дебиты q_{ijv} . Подставляя найденные значения дебитов в (4.67), окончательно определяем давление в каждой зоне соответствующего пласта. Рассмотрим поведение решения поставленной выше задачи (4.52)-(4.56) для однородных начальных и граничных условий в случае, когда пласт состоит из двух зон с разными коэффициентами проницаемости. При этом $M_1 = M_2 = 1$, $q_{11} = q_{21} = q$, $q_{12} = q_{22} = q$, $b_1 = b_2 = b$.

$$\Phi_{imn}(t) = \eta_{imn} \left\{ \frac{1}{a_{mn}} \left[1 - \exp(a_{mn}^2 t) \operatorname{erfc}(a_{mn} \sqrt{t}) - \frac{1}{\beta_{mn}} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \exp(\beta_{mn}^2 t) \operatorname{erfc}(\beta_{mn} \sqrt{t}) \right] d\tau \right\}, \quad (4.68)$$

$$\eta_{imn} = \frac{\sigma_{imn}}{\sqrt{c^2 - 4\gamma_{mn}}}, \quad \sigma_{imn} = \frac{2q}{m_0 b \beta_{жс}} [\psi_{imn}(y_{1i}) \sin \lambda_m x_{i1} + \psi_{imn}(y_{2i}) \lambda_m x_{i2}],$$

$$a_{mn} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4\gamma_{mn}}}{2}, \quad \beta_{mn} = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4\gamma_{mn}}}{2}, \quad \gamma_{mn} = \frac{\lambda_{mn}}{m_0 \mu_0 \beta_{жс}},$$

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x, \quad \operatorname{erfc} v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-x^2) dx, \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx,$$

$erfx$ - функция ошибок Гаусса.

Собственные функции соответствующей задачи имеют вид:

$$\psi_{i1mn}(y) = B_{i1mn} \sin \mu_{1mn}^{(i)} y, \quad (4.69)$$

$$\psi_{i2mn}(y) = B_{i1mn} \frac{\sin \mu_{1mn}^{(i)} h_1}{\sin \mu_{2mn}^{(i)} (H - h_1)} \sin \mu_{2mn}^{(i)} (H - y).$$

Коэффициенты B_{i1mn} определяются из условия нормированности функций $\psi_{i1mn}(y)$ и $\psi_{i2mn}(y)$ в следующем виде:

$$B_{i1mn} = \sqrt{2} \left[\frac{K_{i1}}{\chi_{i1}} \left(h_1 - \frac{\sin 2\mu_{1mn}^{(i)} h_1}{2\mu_{1mn}^{(i)}} \right) + \frac{K_{i2} \sin^2 \mu_{1mn}^{(i)} h_1}{\chi_{i2} \sin^2 \mu_{2mn}^{(i)} h_2} \left(H - h_1 - \frac{\sin 2\mu_{2mn}^{(i)} h_2}{2\mu_{2mn}^{(i)}} \right) \right]^{-1/2}.$$

Собственные числа $\mu_{2mn}^{(i)}$ определяются из следующих трансцендентных систем:

$$\begin{cases} K_{i1} \mu_{1mn}^{(i)} \operatorname{ctg} \mu_{1mn}^{(i)} h_1 + K_{i2} \mu_{2mn}^{(i)} \operatorname{ctg} \mu_{2mn}^{(i)} (H - h_1) = 0 \\ K_{i1} \left((\mu_{1mn}^{(i)})^2 + \lambda_m^2 \right) = K_{i2} \left((\mu_{2mn}^{(i)})^2 + \lambda_m^2 \right) \end{cases} \quad (4.70)$$

В этом случае решение задачи (4.62)-(4.63) имеет вид:

$$U_i(x, y, t) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{imn}(t) \Psi_{ijn}(y) \sin \frac{\pi m}{L} x. \quad (4.71)$$

В частности, при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, будем иметь

$$\sigma_{imn} = \frac{q}{m_0 \beta_{жс}} \Psi_{imn}(y) \sin \lambda m x.$$

Учитывая, что $x = x_1 + r_c$, $y = y_1$, из (4.71) получим:

$$U_{ci}(x_1 + r_c, y_1, t) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{imn}(t) \Psi_{imn}(y_1) \sin \frac{\pi m(x_1 + r_c)}{L}. \quad (4.72)$$

В этом случае q_{11}, q_{21} определяются из условий $q_{11} + q_{21} = Q$, $U_{c11} = U_{c21}$ в виде

$$q^* = \frac{q_{11}}{Q} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{2mn}(t) \Psi_{imn}(y_1) \sin \frac{\pi m(x_1 + r_c)}{L} \times \quad (4.73)$$

$$\times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{imn} [g_{1mn}(t) + g_{2mn}(t)] \sin \frac{\pi m(x_1 + r_c)}{L} \right\}^{-1}$$

Здесь

$$\Phi_{imn} = g_{imn} q_n \quad (i=1, 2).$$

По формуле (4.73) проведены численные расчеты и построены соответствующие кривые на основании данных:

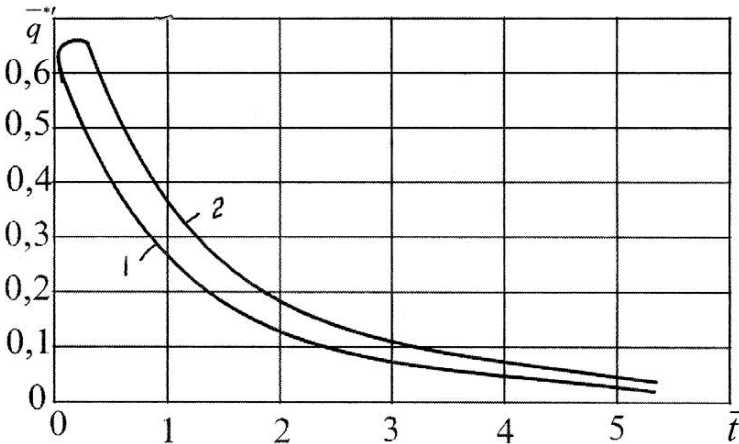
$$L = 1500 \text{ м}; H = 1000 \text{ м}; h_1 = 600 \text{ м}; x_1 = 400 \text{ м}; y_1 = 400;$$

$$\bar{q}^* = \frac{q^*}{q_0}; \bar{t} = \frac{t}{t_0}; t = 5 \text{ час}; 1 \text{ сум}; 6 \text{ мес.}; 1 \text{ год};$$

$$\delta_1 = 0,0021 \text{ (МПа·сек)}^{-1/2}, m_0 = 0,2; \mu_0 = 10^{-4} \text{ Пас};$$

$$\beta_{жс} = 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}; K^* = 0,2; K^* = \frac{K_{12}}{K_{11}}.$$

Из графика видно, что с увеличением значения времени стабилизация расхода происходит через некоторое время после начала стадии разработки.



В начальной стадии разработки кривая 2 (с учетом ползучести) выпуклая, а с течением времени она асимптотически приближается к оси \bar{t} .

Из графиков видно, что с увеличением значения времени стабилизация расхода жидкости для кривой (без учета ползучести) происходит более плавно, чем для кривой 2 (с учетом ползучести).

С увеличением времени безразмерный дебит убывает, что объясняется замкнутостью пласта.

4.6. О решении интегро-дифференциальных уравнений фильтрации жидкости с учетом ползучих сред

Рассматривается задача о нестационарной фильтрации жидкости в неоднородном закрытом пласте с учетом ползучести среды и при наличии на забое скважин неполной песчаной пробки.

Поставленная задача имеет следующую математическую постановку: найти в области

$$D_1 = \{0 \leq z \leq h, r_c \leq r \leq R_k\}, D_2 = \{0 \leq z \leq h_1, 0 \leq r \leq r_c\}$$

решение системы интегро-дифференциальных уравнений типа свертки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial z^2} = \\ = \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial U_j}{\partial t} + \frac{m_1}{\chi_j \beta_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \exp[-\gamma(t-r)] U_j dr \end{aligned} \quad (4.74)$$

при следующих начальных

$$U_j(r, z, t) \Big|_{t=0} = 0 \quad (j=1, 2) \quad (4.75)$$

и граничных

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r_c \leq r \leq R_k}} = \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{\substack{z=h \\ r_c \leq r \leq R_k}} = 0, \\ \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ 0 \leq r \leq r_c}} = 0, \end{aligned}$$

$$U_2 \Big|_{\substack{z=h_1 \\ 0 \leq r \leq r_c}} = U_c = const,$$

$$U_1 \Big|_{z=R_k} = U_k = const,$$

$$U_1 \Big|_{\substack{r=r_c \\ h_1 \leq z \leq h}} = U_c = const,$$

$$U_1 \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z \leq h_1}} = U_2 \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z \leq h_1}}, \quad (4.76)$$

$$K_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z \leq h_1}} = K_2 \frac{\partial U_2}{\partial r} \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z \leq h_1}}$$

условиях.

Здесь $U_j = P_0 - P_j(r, z, t)$, $\chi = K_j \mu_0^{-1} m_0^{-1} \beta_m^{-1}$, K_1 , K_2 , h и h_1 - проницаемости и мощности пласта и песчаной пробки.

На общей границе пласта давление задается в виде:

$$U_1 \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z \leq h_1}} = U_2 \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z \leq h_1}} = U_c + \sum_{j=1}^n a_j \left[\cos \frac{\pi j}{h} z - \cos \pi j \right]. \quad (4.77)$$

Применяя для решения поставленной задачи (4.74)-(4.76) конечное косинус-преобразование Фурье [84] по переменной z с ядром $\cos \mu_m z$, $\cos \lambda_m z$, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_m}{\partial r} - \mu_m^2 U_m = \\ & = b_1 \frac{\partial U_m}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \exp[-\gamma(t-\tau)] U_{1m} d\tau, \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_{2m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{2m}}{\partial r} - \lambda_m^2 U_{2m} + (-1)^{m+1} \lambda_m U_c = \\ & = b_2 \frac{\partial U_{2m}}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \exp[\gamma(t-r)] U_{2m} dz, \end{aligned} \quad (4.79)$$

где

$$U_{1m} = \int_0^h U_1 \cos \mu_m z dz, \quad U_{2m} = \int_0^h U_2 \cos \lambda_m z dz,$$

$$\mu_m = \frac{\pi m}{h}, \quad \lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2h_1} \quad (m=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_j = \frac{1}{\chi_j}, \quad C_j = \frac{m_1}{\chi_j \beta_m} \quad (j=1, 2).$$

Начальные и граничные условия (4.75)-(4.76)

$$U_{1m}|_{r=R_k} = U_{1mk} = 0, \quad U_{2m} \neq \infty,$$

$$U_{1m}|_{r=r_c} = U_{1mc} =$$

$$= \sum_{j=1}^n a_j (-1)^j \sin \mu_m h_1 \left[\frac{1}{2 \left(\frac{\pi j}{h_1} + \mu_m \right)} - \frac{1}{2 \left(\frac{\pi j}{h_1} - \mu_m \right)} - \frac{1}{\mu_m} \right], \quad (4.80)$$

$$U_{2m}|_{r=r_c} = U_{2mc} =$$

$$= (-1)^{m+1} \left\{ U_j \frac{1}{\lambda_m} + \sum_{j=1}^n a_j (-1)^j \left[\frac{1}{2 \left(\frac{\pi j}{h_1} + \mu_m \right)} - \frac{1}{2 \left(\frac{\pi j}{h_1} - \mu_m \right)} - \frac{1}{\lambda_m} \right] \right\}.$$

После использования нами преобразования Лапласа, задача (4.78)-(4.80) примет вид:

$$\frac{d^2 \bar{U}_{1m}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{U}_{1m}}{dr} - \eta_{1m}^2 \bar{U}_{1m} = 0, \quad (4.81)$$

$$\frac{d^2 \bar{U}_{2m}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{U}_{2m}}{dr} - \eta_{2m}^2 \bar{U}_{2m} + (-1)^{m+1} U_c \frac{\lambda_m}{s} = 0, \quad (4.82)$$

$$\bar{U}_{1m}|_{r=r_c} = \frac{\bar{U}_{1mc}}{S},$$

$$\bar{U}_{2m}|_{r=r_c} = \frac{\bar{U}_{2mc}}{S}, \quad (4.83)$$

$$\bar{U}_{1m}|_{r=R_k} = 0$$

где

$$\bar{U}_{jm} = \int_0^{\infty} U_j e^{-St} dt \quad (j=1, 2),$$

$$\eta_{1m}^2 = \frac{b_1 S + (\mu_m^2 + b_1 \gamma + c_1) S + \mu_m^2 \gamma}{S + \gamma},$$

$$\eta_{2m}^2 = \frac{b_2 S + (\lambda_m^2 + b_2 \gamma + c_2) S + \lambda_m^2 \gamma}{S + \gamma}$$

Решение задачи (4.81)-(4.83) в классе изображений имеет вид:

$$\bar{U}_{1m} = \frac{U_{1mc}}{S} \frac{K_0(\mu_{1m} R_k) I_0(\eta_{1m} r) - I_0(\gamma_{1m} R_k) K_0(\eta_{1m} r)}{I_0(\eta_{1m} r_c) K_0(\eta_{1m} R_k) - I_0(\eta_{1m} R_k) K_0(\eta_{1m} r_c)}, \quad (4.84)$$

$$\bar{U}_{2m} = \left[\frac{U_{2mc}}{S} - (-1)^{m+1} U_c \frac{\lambda_m}{\eta_{2m}^2} \right] \frac{I_0(\eta_{2m} r_c)}{I_0(\eta_{2m} r_c)} + (-1)^{m+1} U_c \frac{\lambda_m}{S \eta_{2m}^2},$$

здесь I_0, K_0 - Бесселевы функции мнимого аргумента первого и второго рода. Так как точный переход от Лапласовых изображений к оригиналам представляет большую математическую трудность, то ограничимся приближенным решением. Используя метод Тер-Хаара о приближенном обращении преобразования Лапласа и обратное преобразование Фурье, получим:

$$U_1 = \frac{1}{h} U_{10}(0, t) + \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}(r, t) \cos \mu_m z, \quad (4.85)$$

$$U_2 = \frac{1}{h_1} U_{20}(0, t) + \frac{2}{h_1} \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}(r, t) \cos \lambda_m z, \quad (4.86)$$

$U_{jm}(r, t)$ - является приближенным обращением преобразования Лапласа функции \bar{U}_{jm} :

$$U_{1m}(r, t) = I_{1mc} \frac{K_0(\theta_{1m} R_k) I_0(\theta_{1m} r) - I_0(\theta_{1m} R_k) K_0(\theta_{1m} r)}{I_0(\theta_{1m} r_c) K_0(\theta_{1m} R_k) - I_0(\theta_{1m} R_k) K_0(\theta_{1m} r_c)}, \quad (4.87)$$

$$U_{2m}(r, t) = \left[U_{2mc}^t - (-1)^{m+1} U_c \frac{\lambda_m}{\theta_{2m}^2} \right] \frac{I_0(\theta_{2m} r_c)}{I_0(\theta_{2m} r_c)} + (-1)^{m+1} U_c \frac{\lambda_m}{\theta_{2m}^2}, \quad (4.88)$$

где

$$\theta_{1m}^2(t) = \frac{\mu_m^2 \gamma^2 + (\mu_m^2 + b_1 \gamma + c_1) t + b_1}{t(1 + \gamma)},$$

$$\theta_{2m}^2(t) = \frac{\lambda_m^2 \gamma^2 + (\lambda_m^2 + b_2 \gamma + c_2) t + b_2}{t(1 + \gamma)}.$$

Коэффициенты a_j определяются из следующих интегральных соотношений:

$$K_1 \int_{\frac{(v-1)h_1}{n}}^{\frac{vh_1}{n}} \frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{r=r_c} dz = K_2 \int_{\frac{(v-1)h_1}{n}}^{\frac{vh_1}{n}} \frac{\partial U_2}{\partial r} \Big|_{r=r_c} dz. \quad (4.89)$$

При помощи формулы (4.85)-(4.86) можно определить давление в любой точке пласта для любого момента времени.

4.7. Математическое моделирование фильтрации жидкости в средах с различными ядрами ползучести

Деформационные свойства горных пород существенно влияют на фильтрацию жидкости и газа в пористых (или трещиноватых, трещиновато пористых) средах. Экспериментальному исследованию деформационных свойств нефтесодержащих пластов в связи с фильтрацией в них жидкостей и газов посвящено большое количество работ.

Проведенные исследования показывают, что связь между деформацией и напряжением имеет релаксационный характер, что свидетельствует о необходимости учета в расчетах фильтрационных течений запаздывающего характера.

В данном параграфе рассматривается задача о притоке жидкости к скважинам в ползучей среде с учетом различных ядер ползучести.

Исследование свойств ползучести горных пород основано на опытных данных с развивающимися во времени значениями деформации и напряжения.

Задача изучения закономерностей деформирования материалов во времени является сложной и требует глубоких теоретических и лабораторных исследований.

Учет ползучести различных грунтов при фильтрации жидкости и газа, описываемой интегро-дифференциальным уравнением, характеризуется определенной зависимостью между деформацией и напряжением. Ядро этого интегро-дифференциального уравнения называется ядром ползучести.

Укажем некоторые аналитические виды ядра ползучести:

- ядро Л.Больцмана:

$$L(t, \tau) = \frac{a}{t - \tau},$$

a - постоянная;

-экспоненциальное ядро:

$$L(t, \tau) = \theta e^{-\lambda(t-\tau)}, \quad \lambda = const.$$

-ядро Абеля:

$$L(t, \tau) = \delta(t - \tau)^{-\alpha},$$

α, δ - постоянные, $0 < \alpha < 1$;

- ядро Ф.Р.Ржаницына:

$$L(t, \tau) = \frac{Ae^{-c(t-\tau)}}{(t - \tau)^{1-\alpha}},$$

A, c, α - постоянные;

- ядро Ю.Н.Работнова:

$$R(t) = t^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^m}{\tau^{\gamma(n+1)} \tilde{A}[\lambda(\delta + 1)]},$$

где $0 < \gamma \leq 1$, τ_1 - время релаксации; \tilde{A} - гамма функция и др.

Представляет интерес при одних и тех же условиях дать сравнительный анализ полученных решений с учетом различных видов ядер, учитывающих ползучесть пласта.

Пусть в бесконечном ползучем пласте работает прямолинейная галерея. Требуется найти в любой точке пласта распределение давления, вызванного пуском такой галереи.

Поставленная задача имеет следующую математическую постановку. Найти в области $(0 \leq x < +\infty)$ решение интегро-дифференциальных уравнений типа свертки;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi} + \frac{a_1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t-\tau)U(x,\tau)d\tau, \quad (4.90)$$

при следующих начальных

$$U(x,t)|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x < +\infty$$

и

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{\mu Q}{Kh}, \quad U|_{x \rightarrow +\infty} = 0, \quad (4.91)$$

граничных условиях.

Здесь

$$U(x,t) = p_0 - p(x,t), \quad \chi = \frac{K}{\mu m \beta_m}, \quad a_1 = \frac{1}{\beta_m},$$

h - мощность пласта; Q - дебит галереи.

Применяя для решения задачи (4.90) - (4.91) преобразование Лапласа по времени, получим в пространстве изображений следующую задачу:

$$\frac{d^2 \bar{U}}{dx^2} - \frac{s}{\chi} [1 + a_1 R(s)] \bar{U} = 0. \quad (4.92)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{\mu Q}{sKh}, \quad \bar{U}|_{x \rightarrow +\infty} = 0, \quad (4.93)$$

где

$$\bar{U}(x,s) = \int_0^\infty U(x,t)e^{-st} dt, \quad R(s) = \int_0^\infty R(t)e^{-st} dt.$$

Решение уравнения (4.92) при условии (4.93) имеет вид:

$$U(x, s) = \frac{\mu Q}{Kh} \cdot \frac{\exp(-\varphi(s))}{\varphi(s)}, \quad (4.94)$$

где $\varphi^2(s) = \frac{s}{\chi} [1 + a_1 R(s)]$.

Рассмотрим различные случаи:

1. Ядро ползучести представляется в виде экспоненциальной функции:

$$R(t - \tau) = m_1 \exp[-\gamma(t - \tau)],$$

где m_1 - параметр ползучести, $m_1 > 0$, γ^{-1} - время релаксации породы.

В этом случае решение задачи (4.92) - (4.93) будет в виде:

$$\bar{U}(x, s) = \frac{\mu Q}{Kh} \cdot \frac{\exp(-\varphi(s))}{\varphi(s)}, \quad (4.95)$$

здесь $\varphi^2(s) = \frac{1}{\chi} \frac{s^2(a + \gamma)s}{s + \gamma}$.

Используя метод Тер-Хаара о приближенном обращении преобразования Лапласа, получим:

$$U(x, t) = \frac{\mu Q}{Kh} \frac{\exp\left[-\sqrt{\frac{1+(a+\gamma)t}{\chi t(1+\gamma)}} x\right]}{\sqrt{\frac{1+(a+\gamma)t}{\chi t(1+\gamma)}}}. \quad (4.96)$$

Если в формуле (4.96) принять $x = 0$, то найдем

значение переменного безразмерного забойного давления в виде:

$$\Delta P_c(t) = \sqrt{\frac{\chi t(1 + \gamma t)}{1 + (a + \gamma)t}}, \quad (4.97)$$

где

$$\Delta P_c(t) = \frac{kh(P_0 - P_c(t))}{\mu Q}, \quad a = \frac{m_1}{\beta_a}.$$

2. Ядро ползучести представляется в виде ядра Абеля:

$$R(t - \tau) = \frac{\delta_1}{\sqrt{t - \tau}}.$$

В этом случае (4.94) имеет вид:

$$\bar{U} = \frac{\mu Q}{Kh} \cdot \frac{\exp[-\psi(s)]x}{\psi(s)}, \quad (4.98)$$

где $\psi^2(s) = \frac{1}{\chi} (s + b\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{s})$, $b = \frac{\delta_1}{\beta_a}$.

Используя метод Тер-Хаара, из (4.98) имеем:

$$U = \frac{\mu Q}{Kh} \frac{\exp\left[-\sqrt{\frac{1}{\chi t}(1 + b\sqrt{\pi}\sqrt{t})}x\right]}{\sqrt{\frac{1}{\chi t}(1 + b\sqrt{\pi}\sqrt{t})}}. \quad (4.99)$$

Если в формуле (4.99) принять $x = 0$, тогда получим безразмерный перепад давления в виде:

$$\Delta P_c = \sqrt{\frac{\chi t}{1 + b\sqrt{\pi t}}}. \quad (4.100)$$

По формулам (4.97) - (4.100) проведены численные расчеты при следующих данных:

$$m_1 = 3,14 \cdot 10^{-8} ; \beta_w = 5 \cdot 10^{-3} ; \chi = 0,05 ; \delta_1 = 0,0021 ; a = 68 \cdot 10^{-7} ; \gamma = 4,3 \cdot 10^{-6} .$$
$$t = 36 \cdot 10^2 ; 18 \cdot 10^3 ; 2592 \cdot 10^3 ; 15552 \cdot 10^3 ; 31104 \cdot 10^3 ; 62208 \cdot 10^3 .$$

Результаты представлены в таблице.

Таблица.

Изменение давления в зависимости от времени для различных ядер.

t	P_1	P_2	P_1/P_2
3600	13,25756	2,028585	6,535374462
18000	28,42859	3,052793	9,312320523
2592000	229,9396	10,62574	21,6398758
15552000	551,3402	16,63447	33,14445228
31104000	777,9566	19,78286	39,32478664
62208000	1098,947	23,52678	46,71048799

Приведенные расчеты показывает, что для фиксированного значения времени разработки перепад давления, при прочих равных условиях, при экспоненциальном ядре меньше, чем при степенном.

При этом установлено, что при решении подобных задач параметры, входящие в гидродинамическую модель процесса фильтрации и характеризующие ползучесть пласта, для каждого конкретного случая должны определяться экспериментальным (промышленным) путем или решением обратных задач.

4.8. Решение уравнения фильтрации в неоднородной среде с учетом ползучести

В данном параграфе решается задача о фильтрации жидкости к скважинам в неоднородном конечном пласте с учетом ползучести сред. Каждый пласт разрабатывается соответственно N_1 и N_2 несовершенными скважинами, которые расположены в точке (r_{ji}, θ_{ji}) ($i = \overline{1, N_j}$, $j = 1, 2$). Поставленная задача с помощью обобщенных функций имеет следующую математическую постановку: найти в области

$$D_1 = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h_1\},$$

$$D_2 = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, h_1 \leq z \leq h\}$$

решения системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} + \\ & + \sum_{i=1}^{N_j} \frac{\mu q_{ji}}{2\pi k_j h r} \delta(r-r_{ji}, \theta-\theta_{ji}) [\sigma(z-h_{j-1}) - \sigma(z-h_{j-1}-b_{ji})] = \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{1}{\chi_j \beta_{sc}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t [m_1 \exp(-\gamma_1(t-\tau) + m_2 \exp(-\gamma_2(t-\tau))] u_j d\tau \\ & \quad (j=1, 2) \end{aligned}$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$\begin{aligned}
 & u_j(r, \theta, z, t) \Big|_{t=0} = 0 \\
 & (R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h_1 \mid z \in D_1, \quad h_1 \leq z \leq h \mid z \in D_2), \\
 & \frac{\partial u_1(r, \theta, z, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_j} = f_j(\theta, z, t) \\
 & (0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h_1, \quad t < +\infty) \quad (j=1, 2) \\
 & \frac{\partial u_2(r, \theta, z, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_j} = \varphi_j(\theta, z, t) \\
 & (0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h_1 \leq z \leq h, \quad t < +\infty) \quad (j=1, 2) \\
 & \frac{\partial u_1(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \psi_1(r, \theta, t), \quad \frac{\partial u_2(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h} = \psi_2(r, \theta, t) \\
 & (R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad t < +\infty),
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

на общих границах имеем условия:

$$\begin{aligned}
 & u_1(r, \theta, z, t) \Big|_{z=h_1} = u_2(r, \theta, z, t) \Big|_{z=h_1}, \\
 & K_1 \frac{\partial u_1(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = K_2 \frac{\partial u_2(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} \\
 & (R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad t < +\infty)
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

На функции $u_j(r, \theta, z, t)$ по аргументу « θ » задается условие периодичности

$$u_j(r, \theta + 2\pi, z, t) = u_j(r, \theta, z, t) \quad (j=1, 2). \tag{4.104}$$

$(R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h_1 \mid z \in D_1, \quad h_1 \leq z \leq h \mid z \in D_2, \quad t < +\infty)$
 Здесь $u_j(r, \theta, z, t) = P_0 - P_j(r, \theta, z, t)$. На функции $f(r, \theta, z)$,

$f_j(\theta, z, t)$, $\varphi_j(\theta, z, t)$, $\psi_j(r, \theta, t)$ ($j = 1, 2$) налагаются условия, что они должны быть абсолютно интегрируемы по переменным (r, θ, z) и непрерывно-дифференцируемы по переменной t .

Для решения поставленной задачи (4.101)-(4.104), применяя конечное синус-преобразование Фурье по переменной « θ » с ядром $\sin(m\theta)$ и конечное преобразование Ханкеля, учитывая фильтрующие свойства дельта-функции Дирака, получим:

$$\begin{aligned} & \eta_{mn}(z, t) - \lambda_{mn}^2 u_{1mn}(z, t) + \frac{\partial^2 u_{1mn}(z, t)}{\partial z^2} + F_{1mn}(z) = \\ & = \frac{1}{\chi_1} \frac{\partial u_{1mn}(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{\chi_1 \beta_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t - \tau) u_{1mn}(z, \tau) d\tau \\ & \varphi_{mn}(z, t) - \lambda_{mn}^2 u_{2mn}(z, t) + \frac{\partial^2 u_{2mn}(z, t)}{\partial z^2} + F_{2mn}(z) = \\ & = \frac{1}{\chi_2} \frac{\partial u_{2mn}(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{\chi_2 \beta_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t - \tau) u_{2mn}(z, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\left. \begin{aligned} & u_{jmn}(z, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_{1mn}(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \psi_{1mn}(t), \\ & \frac{\partial u_{2mn}(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \psi_{2mn}(t), \quad u_{1mn}(z, t) \Big|_{z=h_1} = u_{2mn}(z, t) \Big|_{z=h_1}, \\ & K_1 \frac{\partial u_{1mn}(z, t)}{\partial z} \Big|_{t=h_1} = K_2 \frac{\partial u_{2mn}(z, t)}{\partial z} \Big|_{t=h_1}. \end{aligned} \right\} (4.106)$$

Ядро преобразования Ханкеля $V_{mn}(\lambda_{mn} r)$ имеет вид:

$$V_{mn}(\lambda_{mn} r) = \frac{\pi}{2} \left[J_m(\lambda_{mn} r) \frac{Y'_m(\lambda_{mn} r)}{J'_m(\lambda_{mn} r)} - Y_m(\lambda_{mn} r) \right],$$

λ_{mn} - является корнем характеристического уравнения

$$J_{m+1}(\lambda_{mn} R_1) Y_{m+1}(\lambda_{mn} R_2) - Y_{m+1}(\lambda_{mn} R_1) J_{m+1}(\lambda_{mn} R_2) = 0,$$

J_m, Y_m - функции Бесселя m -го порядка первого и второго рода.

где

$$\begin{aligned} u_{jmn}(z, t) &= \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} u(r, \theta, z, t) r V_m(\lambda_{mn} r) \sin(m\theta) d\theta dr \quad (j=1, 2), \\ \eta_{mn}(z, t) &= R_2 f_{2m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_2) - R_1 f_{1m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_1), \\ f_{jm}(z, t) &= \int_0^{2\pi} f_j(\theta, z, t) \sin(m\theta) d\theta \quad (j=1, 2), \\ \varphi_{mn}(z, t) &= R_2 \varphi_{2m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_2) - R_1 \varphi_{1m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_1), \\ \varphi_{jm}(z, t) &= \int_0^{2\pi} \varphi_j(\theta, z, t) \sin(m\theta) d\theta \quad (j=1, 2), \end{aligned} \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned} F_{jmn}(z) &= \frac{\mu}{2\pi h} \sum_{i=1}^{N_j} \frac{q_{ij}}{K_i} V_m(\lambda_{mn} r_{ji}) \sin(m\theta_{ji}) \times \\ &\times [\sigma(z - h_{j-1}) - \sigma(z - h_{j-1} - b_{ij})] \quad (j=1, 2), \end{aligned}$$

$$\Psi_{jmn}(t) = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Psi_j(r, \theta, t) r V_m(\lambda_{mn} r) \sin(m\theta) d\theta dr,$$

$$R(t - \tau) = m_1 \exp(-\gamma_1(t - \tau)) + m_2 \exp(-\gamma_2(t - \tau)).$$

Применяя метод собственных функций Г.А.Гринберга [4] к задаче 4.104)-(4.106), получим задачу типа Коши:

$$\frac{d\Phi_{mnv}(t)}{dt^2} + \frac{d}{dt} \int_0^t R(t - \tau) \Phi_{mnv}(\tau) d\tau + \lambda_{mn} \Phi_{mnv}(t) = F_{mnv}(t), \quad (4.108)$$

$$\Phi_{mnv}(t) \Big|_{t=0} = C_{mnv}, \quad (4.109)$$

где

$$\begin{aligned} F_{mnv}(t) &= \Psi_{mnv}(t) + \chi_2 \Psi_{2mn}(t) v(h)_{2mnv} - \chi_1 \Psi_{1mn}(t) v(0)_{1mnv} + A_{mnv}, \\ \Psi_{mnv}(t) &= \chi_1 \int_0^{h_1} \eta_{1mn}(z, t) v_{1mnv}(z) dz + \chi_2 \int_{h_1}^h \Phi_{mn}(z, t) v_{2mnv}(z) dz, \\ \Phi_{mnv}(t) &= \int_0^{h_1} u_{1mn}(z, t) v_{1mnv}(z) dz + \int_{h_1}^h u_{2mn}(z, t) v_{2mnv}(z) dz, \\ A_{mnv} &= \frac{\mu}{2\pi h} C_{1mnv} \left\{ \frac{\chi_1}{K_1 \mu_{1mnv}} \sum_{i=1}^{N_1} q_{1i} \sin(\mu_{1mnv} b_{1i}) \sin(m\theta_{1i}) V_m(\lambda_{mn} r_{1i}) + \right. \\ &+ \left. \frac{\chi_2}{K_2 \mu_{2mnv}} \sum_{i=1}^{N_2} q_{2i} \sin\left(\mu_{2mnv} \frac{b_{2i}}{2}\right) \cos\left(\mu_{2mnv} \left(h_2 - \frac{b_{2i}}{2}\right)\right) \sin(m\theta_{2i}) V_m(\lambda_{mn} r_{2i}) \right\}. \end{aligned}$$

Собственные функции $v_{jmnv}(z)$ ($j=1, 2$) имеют вид

$$\begin{aligned} v_{1mnv}(z) &= C_{1mnv} \cos \mu_{1mn} z, \\ v_{2mnv}(z) &= C_{1mnv} \frac{\cos \mu_{1mnv} h_1}{\cos \mu_{2mnv} h_2} \cos \mu_{2mnv} (h - z) \end{aligned} \quad (4.110)$$

Собственные числа μ_{jmnv} ($j=1, 2$), соответствующие задаче Штурма-Лиувилля, определяются из следующих трансцендентных систем уравнений:

$$\begin{aligned} K_1(\lambda_{mn}^2 + \mu_{1mnv}^2) &= K_2(\lambda_{mn}^2 + \mu_{2mnv}^2), \\ K_1 \mu_{1mnv} \operatorname{tg} \mu_{1mnv} h_1 + K_2 \mu_{2mnv} \operatorname{tg} \mu_{2mnv} h_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Коэффициенты C_{1mnv} - определяются из условия нормировки функции $v_{1mnv}(z)$ и $v_{2mnv}(z)$ в области D_1 и D_2 в виде:

$$C_{1mnv} = \sqrt{\frac{2}{\chi}} \left[h_1 + \frac{1}{2\mu_{1mnv}} \sin 2\mu_{1mnv} h_1 + \frac{\cos^2 \mu_{1mnv} h_1}{\cos^2 \mu_{2mnv} h_2} \left(h_2 + \frac{\sin 2\mu_{2mnv} h_2}{2\mu_{2mnv}} \right) \right]^{-1/2}.$$

Используя преобразование Лапласа, получим решение задачи (4.108)-(4.109) в классе изображений в виде:

$$\bar{\Phi}_{mnv}(s) = \frac{(s + \gamma_1)(s + \gamma_2)[F_{mnv}(s) + A_{mnv}]}{(s + \lambda_{mnv})(s + \gamma_1)(s + \gamma_2) + (a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2)s + (a_1 + a_2)\gamma_1\gamma_2}, \quad (4.112)$$

$$a_j = \frac{m_j}{\beta_{жс}}.$$

Так как точный переход от лапласовых изображений к оригиналам представляет большую математическую трудность, то ограничимся приближенным решением. Используя метод Тер-Хаара [5] о приближенном обращении преобразования Лапласа и обратное преобразование Фурье и Ханкеля, получим решение задачи (4.101)-(4.103) в виде:

$$u_j(r, \theta, z, t) = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\lambda_{mn}^2 \frac{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) + J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})}{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) - J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})} \times \right. \\ \left. \times V_m(\lambda_{mn} r) \Phi_{mnv}(t) v_{jmnv}(z) \sin(m\theta) \right] \quad (j=1, 2), \quad (4.113)$$

где
$$\Phi_{mnv}(t) = \frac{[\gamma_1 \gamma_2 t^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)t + 1][F_{mnv}(t) + A_{mnv}]}{\alpha_{1mnv} t^3 + \alpha_{2mnv} t^2 + \alpha_{3mnv}},$$

$$\alpha_{1mnv} = \gamma_1 \gamma_2 \lambda_{mnv} + (a_1 + a_2) \gamma_1 \gamma_2, \quad \alpha_{2mnv} = \gamma_1 \gamma_2 + (\gamma_1 + \gamma_2) \lambda_{mnv},$$

$$\alpha_{3mnv} = \gamma_1 + \gamma_2 + \lambda_{mnv}.$$

Полученное решение (4.113) является разложением функции давления в ряд по собственным функциям $v_{jmnv}(z)$ ($j=1, 2$), который сходится абсолютно во всех рассматриваемых замкнутых областях. Из полученных решений (4.113), принимая $r = r_j + r_i$, $\theta = \theta_j$, получим забойные давления. Если $m_1 = m_2 = 0$, то получим решение задачи для упругого режима.

4.9. Нестационарная фильтрация жидкости в неоднородной среде с учетом двойной релаксации.

Задача о фильтрации жидкости в неоднородных средах с учетом релаксации исследована в [42]. Ниже рассмотрена задача фильтрации жидкости к системе несовершенных по степени вскрытия пласта скважин в неоднородных пластах, состоящих из двух зон, между пластами которых имеется сплошная связь.

Пусть в трехмерном пространстве область D состоит из двух областей $D_1, D_2, D = D_1 \cup D_2$ мощности h ограниченных цилиндрическими поверхностями. Каждый пласт разрабатывается, соответственно, M_1 и M_2 скважинами, которые расположены в точках $A_i(r_{ij}, \theta_{ij}) (i = \overline{1, M}, j = 1, 2)$. Искомая функция давления $P_j(r, \theta, z, t) (j = 1, 2)$ имеет в этой области конечное число логарифмических особенностей в точках (r_{ij}, θ_j) и на контуре, ограничивающем область D , удовлетворяет соответствующим граничным условиям. Данная задача с помощью обобщенных функций имеет следующую математическую постановку: найти в области

$$D_1 = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h_1\}$$

$$D_2 = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, h_1 \leq z \leq h\}$$

решение системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(P_j + a \frac{\partial P}{\partial t} + b \frac{\partial^2 P_j}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(P_j + a \frac{\partial P_j}{\partial t} + b \frac{\partial^2 P_j}{\partial t^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(P_j + a \frac{\partial P_j}{\partial t} + b \frac{\partial^2 P_j}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left(P_j + a \frac{\partial P_j}{\partial n} + b \frac{\partial^2 P_j}{\partial t} \right) + \\
 & + \frac{1}{\chi_j} \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{v=1}^{M_j} \frac{q_{ijv}(t)}{2\pi h_{jv}} \delta(r - r_{ijv}, \theta - \theta_{ijv}) [\sigma(t - t_{i=1j}) - \sigma(t - t_{i,j})] \\
 & [\sigma(z - h_{j-1}) - \sigma(2 - h_{j-1} - h_{jv})] = \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial}{\partial t} \left(P_j + \gamma \frac{\partial P_j}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 P_j}{\partial t^2} \right) \quad (4.114)
 \end{aligned}$$

(j = 1, 2)

Удовлетворяющее начальным

$$P_j(r, \theta, z, t) \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial P_j(r, \theta, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial^2 P_j(r, \theta, z, t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 0 \quad (4.115)$$

($R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h_1, z \in D_1, h_1 \leq z \leq h / z \in D_2$)

граничным

$$\frac{\partial P_j(r, \theta, z, t)}{\partial t} \Big|_{r=R_1} = f_1(\theta, z, t), (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h_1, 0 \leq t < +\infty)$$

$$\frac{\partial P_j(r, \theta, z, t)}{\partial t} \Big|_{r=R_2} = f_2(\theta, z, t), (0 \leq \theta \leq 2\pi, h_1 \leq z \leq h, 0 \leq t < +\infty)$$

$$\frac{\partial P_j(r, \theta, z, t)}{\partial t} \Big|_{z=0} = 0, (R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t < +\infty)$$

$$\frac{\partial P_2(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, (R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t < +\infty) \quad (4.116)$$

$$P_1(r, \theta, z, t) = P_2(r, \theta + 2\pi, z, t)$$

($R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t < +\infty, 0 \leq z \leq h_1 / z \in D_1, h_1 \leq z \leq h / z \in D_2$)

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned}
 P_1(r, \theta, z, t) \Big|_{z=h_1} &= P_2(r, \theta + 2\pi, z, t) \Big|_{z=h_1} \\
 k_1 \frac{\partial P_1(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} &= k_2 \frac{\partial P_2(r, \theta, z, t)}{\partial t} \Big|_{z=h_1}
 \end{aligned} \tag{4.117}$$

$$(R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t < +\infty),$$

Где

$$\tau_m + \tau_n = a, \tau_m \tau_n = b, \gamma = \frac{m_0 \beta_{жс} a + \beta_c (\tau_\sigma + \tau_d)}{\beta^*}, \eta = \frac{m_0 \beta_{жс} b + \beta_c \tau_\sigma \tau_d}{\beta^*}$$

$\beta^* = m_0 \beta_{жс} + \beta_c, \tau_n, \tau_\sigma$ – постоянные времена релаксации напряжения и релаксации пористости, τ_d – постоянное время релаксации градиента давления; Здесь $P(r, \theta, z, t) (j=1,2)$ – текущее давление в v -j-ом пласте ($j=1,2$); R_1, R_2 – расстояния от начала координат до наружной и внутренней поверхностей, соответственно $a, b, \gamma, \eta, \beta^*$ – некоторые постоянные.

Применяя для решения поставленной задачи (4.114)-(4.117) конечное синус преобразование Фурье по переменной " θ " с ядром $\sin m\theta$ и конечное преобразование Ханкеля [58] учитывая свойства дельта-функции Дирака, получим:

$$\begin{aligned}
 F_{jmn}(z, t) - \lambda_{mn}^2 \left[P_{jmn}(z, t) + a \frac{\partial P_{jmn}(z, t)}{\partial t} + b \frac{\partial^2 P_{jmn}(z, t)}{\partial t^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
 \left[P_{jmn}(z, t) + a \frac{\partial P_{jmn}(z, t)}{\partial t} + b \frac{P_{jmn}(z, t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$\left[P_{jmn}[z, t] + a \frac{\partial P_{jmn}(z, t)}{\partial t} + b \frac{\partial^2 P_{jmn}(z, t)}{\partial t^2} \right] \quad (4.118)$$

$$P_{jmn}(z, t) \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial P_{jmn}(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial^2 P_{jmn}(z, t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 0 \quad (4.119)$$

$$(0 \leq z \leq h_1 | z \in D_1, h_1 \leq z \leq h | z \in D_2) \quad (j=1,2)$$

$$\frac{\partial P_{1mn}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial P_{2mn}}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0,$$

$$P_{1mn}(z, t) \Big|_{z=h_1} = P_{2mn}(z, t) \Big|_{z=h_1}$$

$$k_1 \frac{\partial P_{1mn}}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = k_2 \frac{\partial P_{2mn}}{\partial z} \Big|_{z=h_1} \quad (0 \leq t < +\infty)$$

(4.120)

Ядро преобразования Ханкеля $U_m(\lambda_{mn}r)$ имеет вид:

$$U_m(\lambda_{mn}r) = \frac{\pi}{2} \left[J_m(\lambda_{mn}r) \frac{Y'_m(\lambda_{mn}R_1)}{J'_m(\lambda_{mn}R_1)} - Y_m(\lambda_{mn}r) \right] \quad (4.121)$$

λ_{mn} — является корнем характеристического уравнения:

$$J'_m(\lambda_{mn}R_1)Y'_m(\lambda_{mn}R_2) - Y_m^2(\lambda_{mn}R_1)J_m^1(\lambda_{mn}R_2) = 0 \quad (4.122)$$

где

$$F_{jmn}(z, t) = \varphi_{mn}(z, t) + a \frac{\partial \varphi_{mn}(z, t)}{\partial t} + b \frac{\partial^2 \varphi_{mn}(z, t)}{\partial t^2} + \psi_{mn}(z, t)$$

$$\varphi_{mn}(z, t) = R_2 f_{2m}(z, t) U_m(\lambda_{mn}R_2) - R_1 f_{1m}(z, t) U_m(\lambda_{mn}R_1)$$

$$\psi_{jmn}(z, t) = \frac{1}{4\chi_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{v=1}^{N_j} \frac{q_{ijv}(t)}{h_{jv}} U_m(\lambda_{mn}r_{ijv}) \sin(m\theta_{ijv}) \cdot x \cdot$$

$$\cdot x \cdot [\sigma(t - t_{i-1,j}) - \sigma(t - t_{i,j})] \cdot [\sigma(z - h_{j-1}) - \sigma(z - h_{j-1} - h_{jv})],$$

$$f_{jm}(z, t) = \int_0^{2\pi} f_j(\theta, z, t) \sin(m\theta) d\theta \quad (j = 1, 2)$$

$$P_{jmn}(z, t) = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} P_j \sin(m\theta) r U_m(\lambda_{mn} r) dr d\theta, h_0 = 0, h = h_1 + h_2$$

Рассмотрим совокупность собственных функций $\varphi_{jmn}(z) (j = 1, 2)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi_{jmn}(z) + \left(\frac{\lambda_{mnv}}{\chi_j} - \lambda_{mn}^2 \right) \varphi_{jmnv}(z) = 0 \quad (4.123)$$

и граничным условиям (4.120). Предполагается, что $P_{jmn}(z)$ допускает разложение в ряд по фундаментальным функциям $\varphi_{jmn}(z)$ однородной задачи. При решении задачи (4.118)-(4.120), применяя метод собственных функций Гринберга Г.А. меняя места дифференцирования и интегрирования, по теореме Лейбница получим:

$$\frac{d^3 \phi_{mnv}(t)}{dt} + \alpha_{mnv} \frac{d^2 \phi_{mnv}(t)}{dt^2} + \beta_{mnv} \frac{\partial \phi_{mnv}(t)}{\partial t} + \gamma_{mnv} \phi_{mnv}(t) = \frac{1}{c} V_{mnv}(t) \quad (4.124)$$

$$\phi_{mnv}(t) \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial \phi_{mnv}(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \frac{d^2 \phi_{mnv}(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} = 0 \quad (4.125)$$

Здесь

$$\alpha_{mnv} = \frac{\gamma + b\lambda_{mnv}}{c}, \quad \beta_{mnv} = \frac{\alpha + \alpha\lambda_{mnv}}{c},$$

$$\gamma_{mnv} = \frac{\lambda_{mnv}}{c}, \quad c = \alpha\eta, \quad \alpha = \mu\beta^*$$

$$V_{mnv}(t) = k_1 \int_0^{h_1} \varphi_{1mnv}(z) F_{1mn}(z, t) dz + k_2 \int_{h_1}^h \varphi_{2mnv}(z) F_{2mn}(z, t) dz$$

$$\phi_{mnv}(t) = \int_0^{h_1} \varphi_{1mnv}(z) P_{1mn}(z, t) dz + \int_{h_1}^h \varphi_{1mnv}(z) P_{2mn}(z, t) dz$$

Собственные функции $\varphi_{jmn}(z) (j = 1, 2)$, соответствующей задачи имеют вид:

$$\varphi_{1mnv}(z) = A_{2mnv} \frac{\cos(\mu_{2mnv} h_2) \cos(\mu_{1mnv} z)}{\cos(\mu_{2mnv} h) \cos(\mu_{1mnv} h_1)},$$

$$\varphi_{2mnv}(z) = A_{2mnv} \frac{\cos(\mu_{2mnv} (h - z))}{\cos(\mu_{2mnv} h)}$$

Коэффициенты A_{2mnv} определяются из условия нормированности функций $\varphi_{1mnv}(z), \varphi_{2mnv}(z)$ в [31], μ_{jmnv} – собственные числа, соответствующие задаче Штурма-Лиувилля, определяются из следующей трансцендентной системы:

$$\begin{cases} k_1(\mu_{1mnv}^2 + \lambda_{mn}^2) = k_2(\mu_{2mnv}^2 + \lambda_{mn}^2) \\ k_1 \mu_{1mnv} \operatorname{tg}(\mu_{1mnv} h_1) + k_2 \mu_{2mnv} \operatorname{tg}(\mu_{2mnv} h_2) = 0 \end{cases} \quad (4.126)$$

Применяя к задаче (4.124)-(4.125) преобразования Лапласа и учитывая свойства единичной функции Хевисайда, получим решение задачи в классе изображений в виде:

$$\phi_{mnv}(s) = \frac{1}{c} \cdot \frac{V_{mnv}(s)}{s^3 + \alpha_{mnv} s + \beta_{mnv} s + \gamma_{mnv}} \quad (4.127)$$

где

$$\phi_{mnv}(s) = \int_0^{\infty} \phi_{mnv}(t) e^{-st} dt, V_{mnv}(s) = \int_0^{\infty} v_{mnv}(t) e^{-st} dt, s - \text{параметр}$$

преобразования Лапласа, $\text{Re } s > 0$

Для того, чтобы применить обратное преобразования Лапласа, теорему разложения Хевисайда и теорему о свертке, необходимо найти в знаменателе выражения (4.127) корень кубического многочлена.

По формулам Кардано находим корень кубического многочлена. Пусть $S_{1mnv}, S_{2mnv}, S_{3mnv}$ являются корнями кубического многочлена. Тогда будем иметь:

$$\phi_{mnv}(t) = \frac{1}{c} \int_0^t v_{mnv}(\tau) \{ B_{1mnv} \exp[S_{1mnv}(t-\tau)] + B_{2mnv} \exp[S_{2mnv}(t-\tau)] + B_{3mnv} \exp[S_{3mnv}(t-\tau)] \} d\tau$$

Здесь

$$B_{1mnv} = \frac{1}{(S_{1mnv} - S_{2mnv})(S_{1mnv} - S_{3mnv})}, B_{2mnv} = \frac{1}{(S_{2mnv} - S_{1mnv})(S_{2mnv} - S_{3mnv})}$$

$$B_{3mnv} = \frac{1}{(S_{3mnv} - S_{1mnv})(S_{3mnv} - S_{2mnv})}$$

Обратные преобразования Фурье, Гринберга и Ханкеля дают окончательно решение задачи в виде:

$$P_j(r, \theta, z, t) = \frac{\pi}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \lambda_{mn}^2 \frac{[J'_m(R_1 \lambda_{mn}) \cdot J'_m(R_2 \lambda_{mn})]^2}{[J'_m(R_1 \lambda_{mn})]^2 - [J'_m(R_2 \lambda_{mn})]^2} U_m(\lambda_{mn} r) \phi_{mnv}(t) \varphi_{jmnv}(z) \right\} \sin(m\theta)$$

(4.128)

Для однородных граничных условий решение задачи (4.114)-(4.117) в случае $M_1 = N_1 = 1, q_{uv} = q_0$ имеет то же

вид (4.128). но в этом случае выражение представляется в следующем виде:

$$V_{mnv} = \frac{\alpha q_0}{2\pi} \left[\frac{1}{h_1} U_m(\lambda_{mn} r_1) \sin(m\theta_1) \frac{\operatorname{tg}(\mu_{1mnv} h_1) \cos(\mu_{2mnv} h_2)}{\mu_{1mnv} \cos(\mu_{2mnv} h)} + \frac{1}{h_2} U_m(\lambda_{mn} r_2) \sin(m\theta_2) \frac{\sin(\mu_{2mnv} h_2)}{\mu_{2mnv} \cos(\mu_{2mnv} h)} \right]$$

4.10. Неустановившийся приток жидкости в неоднородных средах, разделенных слабопроницаемой перемычкой с учетом двойной релаксации.

Некоторые краевые задачи теории фильтрации в закрытых релаксационных средах рассмотрены в работах [42]. Ниже решаются задачи о нестационарной фильтрации жидкости в неоднородных закрытых пластах, разделенных слабопроницаемой перемычкой с учетом двойной релаксации. Пусть в трехмерном пространстве область D состоит из двух областей $D_1, D_2, D = D_1 \cup D_2$, на которых заданы граничные условия второго рода. Искомая функция $P_j(x, y, t) (j = 1, 2)$ имеет в данной области конечное число логарифмических особенностей в точках (x_{ijv}, y_{ijv}) .

По схеме Миятиева-Гринского данная задача с использованием обобщенных функций имеет следующую математическую постановку, найти в области $D = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H, 0 \leq z \leq b\}$ решение системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} - \alpha_j (U_j - U_{j-1}) + \frac{1}{\chi_j} \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{v=1}^{M_j} \frac{q_{ijv}(t)}{h_{jv}} \delta(x - x_{ijv}, yy - y_{ijv})$$

$$[\sigma(t - t_{i-1,j}) - (t - t_{i,j})] = \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial U_j}{\partial t} + \frac{1}{\chi_j} \frac{\beta_c}{\tau_{mj} \tau_{nj} \beta_{cj}^*}$$

$$\left[\frac{\tau_{mj} \exp\left(-\frac{1}{\tau_{mj}}\right) - \tau_{nj} \exp\left(-\frac{1}{\tau_{nj}}\right)}{\tau_{mj} - \tau_{nj}} P_0 + (\tau_{dj} + \tau_{\delta j}) U_j + \right.$$

$$+ \frac{\tau_{mj}^2 - \tau_{mj}(\tau_{dj} + \tau_{\delta j}) + \tau_{dj} \tau_{\delta j}}{(\tau_{mj} - \tau_{nj}) \tau_{mj}} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_{mj}}\right) U_j d\tau -$$

$$\left. - \frac{\tau_{nj}^2 - \tau_{nj}(\tau_{dj} + \tau_{\delta j}) + \tau_{dj} \tau_{\delta j}}{\tau_{nj}(\tau_{mj} - \tau_{nj})} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_{nj}}\right) U_j d\tau \right], (j=1,2) \quad (4.129)$$

при следующих начальных

$$U_j(x, y, t)_{t=0} = 0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H) \quad (4.130)$$

и граничных

$$\frac{\partial U_j}{\partial x} \Big|_{x=0} = f_1(y, t), \frac{\partial U_j}{\partial x} \Big|_{x=L} = f_2(y, t)$$

$$(0 \leq y \leq H, 0 < t < +\infty)$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial y} \Big|_{y=0} = \varphi_1(x, t), \frac{\partial U_j}{\partial y} \Big|_{y=H} = \varphi_2(x, t)$$

$$(0 \leq x \leq L, 0 < t < +\infty) \quad (4.131)$$

условиях $(j=1,2)$,

где

$$\alpha_j = \frac{k_n}{b_n b k_j}, \quad \chi_j = \frac{k_j}{\mu \beta_{cj}}, \quad \beta_{cj}^* = m_0 \beta_{jc} + \beta_c \frac{\tau_{dj} + \tau_{oj}}{\tau_{nj} \tau_{mj}},$$

$$U_j = P_0 - P_j \quad (j = 1, 2)$$

При решении задачи (4.129)-(4.131) воспользуемся двукратным косинус преобразованием Фурье и, учитывая свойства дельта -функции Дирака, получим задачу типа Коши:

$$f_{mn}(t) - (\lambda_{mn}^2 + \alpha_1) U_{1mn}(t) + \alpha_1 U_{2mn}(t) + \psi_{1mn}(t) = \frac{1}{\chi_1} \cdot \frac{dU_{1mn}(t)}{dt} +$$

$$+ \frac{\alpha_1}{\chi_1} \left[b_1 U_{1mn}(t) + \gamma_1 \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_{m_1}}\right) U_{1mn}(\tau) - \gamma_1 \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_{n_1}}\right) U_{1mn}(\tau) d\tau \right]$$

$$f_{mn}(t) - (\lambda_{mn}^2 + \alpha_2) U_{2mn}(t) + \alpha_2 U_{1mn}(t) + \psi_{2mn}(t) = \frac{1}{\chi_2} \cdot \frac{dU_{2mn}(t)}{dt} +$$

$$\frac{\alpha_2}{\chi_2} \left[b_2 U_{2mn}(t) + \gamma_2 \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_{m_2}}\right) U_{2mn}(\tau) d\tau - \gamma_2 \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_{n_2}}\right) U_{2mn}(\tau) d\tau \right] \quad (4.132)$$

$$U_{jmn}(t) \Big|_{t=0} = 0 \quad (4.133)$$

где

$$\psi_{jmn}(s) = \frac{1}{\chi_j} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{v=1}^{M_2} q_{ijv}(t) \cos \lambda_m x_{ijv} \cdot \cos \lambda_n y_{ijv} [\sigma(t - t_{i-1,j}) - \sigma(t - t_{i,j})]$$

$$f_{mn}(t) = (-1)^m f_{2n}(t) - f_{1n}(t) + (-1)^n \varphi_{2m}(t) - \varphi_{1m}(t), \quad \lambda_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \lambda_n^2$$

$$f_{jn}(t) = \int_0^H f_j(y, t) \cos \lambda_n y dy, \quad \varphi_{jm}(t) = \int_0^L \varphi_j(x, t) \cos \lambda_m x dx$$

$$U_{jmn}(t) = \int_0^L \int_0^H U_j(x, y, t) \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y dx dy \quad (j = 1, 2), \lambda_m = \frac{\pi m}{L},$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{H} (m, n = 0, 1, \dots), b_j = \tau_{\alpha j} + \tau_{\sigma j}, \eta_j = \frac{\tau_{mj}^2 - \tau_{mj} b_j + \tau_{\alpha j} \tau_{\sigma j}}{\tau_{mj} (\tau_{mj} - \tau_{nj})},$$

$$\alpha_j = \frac{\beta_c}{\tau_{mj} \tau_{nj} \beta_{cj}}, \gamma_j = \frac{\tau_{nj}^2 - \tau_{nj} b_j + \tau_{\alpha j} \tau_{\sigma j}}{\tau_{nj} (\tau_{mj} - \tau_{nj})} \quad (j = 1, 2)$$

Для нахождения решения системы интегро-дифференциальных уравнений (4.132) при указанных начальных условиях (4.133), применим к ней интегральное преобразование Лапласа. Учитывая свойства единичной функции Хевисайда, в результате получим решение в классе изображений в виде:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{1mn}(s) &= \frac{F_{1mn}(s)\phi_{2mn}(s) + \alpha_1 F_{2mn}(s)}{\phi_{1mn}(s)\phi_{2mn}(s) - \alpha_1 \alpha_2}, \\ \bar{U}_{2mn}(s) &= \frac{F_{2mn}(s)\phi_{1mn}(s) + \alpha_2 F_{1mn}(s)}{\phi_{1mn}(s)\phi_{2mn}(s) - \alpha_1 \alpha_2} \end{aligned} \quad (4.134)$$

где

$$F_{1mn}(s) = \bar{f}_{mn}(s) + \frac{1}{\chi_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{v=1}^{M_1} \left[\int_{t_{j-1,1}}^{t_{j,1}} \frac{q_{i1v}(t)}{h_{i1}} e^{-st} dt \right] \cos \lambda_m x_{i1v} \cdot \cos \lambda_n y_{i1v}$$

$$F_{2mn}(s) = \bar{f}_{mn}(s) + \frac{1}{\chi_2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{v=1}^{M_2} \left[\int_{t_{j-1,2}}^{t_{j,2}} \frac{q_{i2v}(t)}{h_{i2}} \right] \cos \lambda_m x_{i2v} \cdot \cos \lambda_n y_{i2v}$$

$$\varphi_{jmn}(s) = \lambda_{mn}^2 + \alpha_j + \frac{s}{\chi_j} + \frac{\alpha_j}{\chi_j} \left(b_j + \frac{\eta_j}{s + \tau_{mj}} - \frac{\gamma_j}{s + \tau_{nj}} \right) \quad (j = 1, 2)$$

здесь

$$\begin{aligned} \bar{f}_{mn}(s) &= \int_0^{\infty} f_{mn}(t)e^{-st} dt, F_{jmn}(s) = \int_0^{\infty} F_j(t)e^{-st} dt, \\ \phi_{jmn}(s) &= \int_0^{\infty} \phi_j(t)e^{-st} dt, \bar{U}_{jmn}(s) = \int_0^{\infty} U_{jmn}(t)e^{-st} dt, \operatorname{Re} s > 0 \\ (j &= 1, 2) \end{aligned}$$

Применяя обратные преобразования Лапласа и Фурье, решение поставленной задачи находим в виде

$$U_1(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\eta}^{\sigma+i\eta} \frac{F_{1mn}(s)\phi_{2mn}(s) + \alpha_1 F_{2mn}(s)}{\phi_{1mn}(s)\phi_{2mn}(s) - \alpha_1\alpha_2} \right] \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y \quad (4.135)$$

$$U_2(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\eta}^{\sigma+i\eta} \frac{F_{1mn}(s)\Phi_{2mn}(s) + 2_1 F_{1mn}(s)}{\phi_{1mn}(s) - \alpha_1\alpha_2} \right] \quad (4.136)$$

Рассмотрим задачу (4.129)-(4.131) для однородного граничного условия. Тогда в случае $N_j = M_j = 1$ выражение (4.134) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{1mn}(s) &= \frac{q}{sh} \frac{\psi_{1mn}(s)\phi_{2mn}(s) + \alpha_1\psi_{2mn}(s)}{\phi_{mn}(s) - \alpha_1\alpha_2}, \\ \bar{U}_{2mn}(s) &= \frac{q}{sh} \frac{\psi_{2mn}(s)\phi_{1mn}(s) + \alpha_2\psi_{1mn}(s)}{\phi_{mn}(s) - \alpha_1\alpha_2} \end{aligned} \quad (4.137)$$

Здесь

$$\chi_{jm} = \frac{1}{\lambda_j} \cdot \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y \quad (j = 1, 2), \quad \phi_{mn}(s) = \phi_{1mn}(s) \cdot \phi_{2mn}(s)$$

Точный переход от Лапласовых изображений (4.137) к оригиналам представляет большую математическую трудность, поэтому ограничиваемся приближенным решением. Используя метод Тер-Хаара [8] о приближенном обращении преобразования Лапласа и обратное преобразование Фурье для однородных граничных условий, получим окончательное решение краевой задачи (4.129)-(4.131) в виде:

$$P_1(x, y, t) = P_0 - \frac{q}{h} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{1mn} V_{2mn}(t) + \alpha_1 \psi_{2mn}}{v_{mn}(t) - \alpha_1 \alpha_2} \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y \quad (4.138)$$

$$P_{21}(x, y, t) = P_0 - \frac{q}{h} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{2mn} V_{1mn}(t) + \alpha_2 \psi_{1mn}}{V_{mn}(t) - \alpha_1 \alpha_2} \cos \lambda_m x \cdot \cos \lambda_n y \quad (4.139)$$

Где

$$V_{jmn}(t) = \lambda_{mn}^2 + \alpha_j + \frac{1}{\chi_j^t} + \frac{\alpha_j}{\chi_j} \left(b_j + \frac{\eta_j^t}{1 + \tau_{nj}t} - \frac{\gamma_j t}{1 + \tau_{nj}t} \right) \quad (j = 1, 2)$$

$$V_{mn}(t) = V_{1mn}(t) V_{2mn}(t)$$

В заключение необходимо отметить, что рассмотренная методика решения задач нестационарной фильтрации в неоднородных средах позволяет определить функции давления в произвольной точке рассматриваемого пласта.

Глава V.

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СКВАЖИН В ПЛАСТАХ С ПОЛЗУЧЕЙ СРЕДОЙ

Одной из основных задач при разработке залежей с ползучей средой является определение фильтрационных параметров пласта и параметров ползучести пористой среды. Предпогая, что ползучесть среды влияет лишь на ее пористость, в работе Аметова И.М. и Басниева К.С. [11] впервые исследована задача определения параметров ползучести по данным восстановления забойного давления в скважинах.

Ниже предлагается ряд эффективных методов [3] интерпретации кривых восстановления забойного давления в скважинах, вскрывших пласты с ползучей средой.

5.1. Методика определения параметров ползучести среды и фильтрационных параметров неограниченного пласта с ползучей средой.

5.1.1. Постановка задачи и основные аналитические соотношения.

Сформулируем постановку задачи. Пусть скважина радиусом r_c , дренирующая длительное время неограниченный по протяженности круговой пласт с постоянным дебитом q , в момент $t = 0$ была остановлена (рис. 5 а,б). После закрытия устья скважины к ее забою продолжает из пласта поступать нефть с дебитом $q(t)$, затухающим из-за восстановления забойного давления $P_c(t)$ и уменьшения депрессии на пласт.

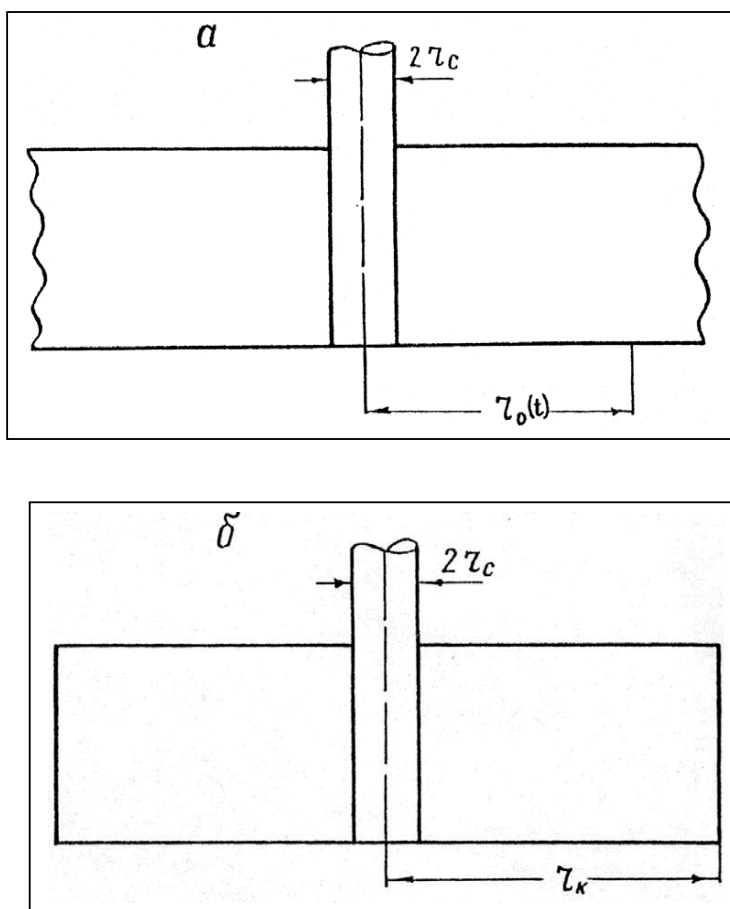


Рис. 5.1. Схема пласта.

a – схема бесконечного пласта.

б – схема ограниченного пласта.

За время длительной эксплуатации с дебитом q_0 в пласте установилось постоянное распределение давления, равное $P_0(r)$. Проницаемость k и пористость m изменяются в соответствии с законами /11/ из-за ползучести среды пласта. Причем, если за время эксплуатации $k(r, t)$ и $m(r, t)$ уменьшаются, в процессе восстановления давления происходит, наоборот, их увеличение. Учитывая, что за время закрытия скважин давление в пласте восстанавливается от $P_0(r)$ до $P_{nl} = P_0$, согласно /15/ $m(r, t)$ и $k(r, t)$ соответственно определяются зависимостями

$$\bar{m}(r, t) = \frac{m(r, t)}{m_{nl}} = 1 + m_1 \int_0^t \exp[-\gamma_m(t - \tau)](P - P_{nl})d\tau,$$

$$\bar{k}(r, t) = \frac{k(r, t)}{K_{nl}} = 1 + k_1 \int_0^t \exp[-\gamma_k(t - \tau)](P - P_{nl})d\tau \quad (5.1)$$

Здесь m_{nl}, k_{nl} -соответствуют $k(r, t)$ и $m(r, t)$ при $P = P_{nl}$ и $t = 0$, т.е. при текущем пластовом давлении, определенном на дату исследования скважин; $\gamma_m^{-1} = \tau_m$ и $\gamma_k^{-1} = \tau_k$ время релаксации соответственно пористости и проницаемости ползучей пористой среды.

Таким образом, задача определения параметров пласта по данным восстановления давления сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\bar{k}(r, t) r \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \frac{1}{\partial \ell} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{m_1}{\partial \ell \beta_{\text{жс}}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \exp[-\gamma_m(t - \tau)] \cdot x \cdot$$

$$\cdot x \cdot [u(r, t) - u(r)] d\tau \quad (5.2)$$

при следующих начальном и граничных условиях

$$u(r, 0) = 0 \quad (5.3)$$

$$u(r_0, t) = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial u(r_0, t)}{\partial r} = 0 \quad (5.5)$$

$$u(r_c, t) = u_c(t) = \Delta P_c(t) = P_c(t) - P_{c0} \quad (5.6)$$

$$r_c \cdot \frac{\partial u(r_c, t)}{\partial r} = -A_0 \frac{\Delta \bar{q}(t)}{\bar{K}_c(t)} \quad (5.7)$$

где

$$u(r_c, t) = P(r_c, t) - P_0(r), u_0(r) = P_{nl} - P_0(r), \Delta \bar{q} = 1 - \frac{q(t)}{q_0} =$$

$$= 1 - \bar{q}(t), A_0 = \frac{\mu q_0}{2\pi K_{nl} h}, \quad \partial \ell = \frac{K_{nl}}{\mu m_{nl} \beta_{ж}}$$

h – толщина пласта; μ – вязкость жидкости; P_{c0} – значение $P_0(r)$ при $r = r_c$; $r_0(t)$ – радиус зоны возмущения.

Задачу (5.2)-(5.7) будем решать методом осреднения /41/ и заменяя $\bar{k}(r, t)$ и $\bar{m}(r, t)$ их средним значением, т.е. $\bar{K}_{cp}(t)$ и $\bar{m}_{cp}(t)$. Тогда из (5.1) имеем:

$$\bar{K}_{cp}(t) = 1 - \frac{\Delta P_{c0}}{2} \cdot \frac{k_1}{\gamma_k} \exp(-\gamma_k t) = \bar{k}_c(t) \quad (5.8)$$

$$\bar{m}_{cp}(t) = 1 - \frac{\Delta P_{c0}}{2} \cdot \frac{m_1}{\gamma_m} \exp(-\gamma_m t) = \bar{m}_c(t) \quad (5.9)$$

где $\Delta P_{c0} = P_{nl} - P_{c0}$

Применяя метод осреднения и учитывая (5.8) и (5.9), уравнение (5.2) приводится к следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = f_1(t) \\ \partial \ell f(t) = \frac{2}{r_0^2 - r_c^2} \int_{r_c}^{r_0} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta P_{c0}}{2} \cdot \frac{m_1}{\beta_{ж}} \exp(-\gamma_m t) \right] r dr \end{cases} \quad (5.10)$$

где

$$f_1(t) = f(t) / \bar{k}_c(t) \quad \text{или} \quad f(t) = \bar{k}_c(t) \cdot f_1(t)$$

Решение системы уравнений при условиях (5.3)-(5.4) и (5.7) имеет вид:

$$u(r, t) = \frac{2A_0}{r_0^2 - r_c^2} \cdot \frac{\Delta \bar{q}(t)}{\bar{k}_c(t)} \left[\frac{r_0^2(t)}{2} \ln \frac{r_0(t)}{2} - \frac{r_0^2(t) - r^2}{4} \right] \quad (5.11)$$

$$\frac{8\partial \ell}{r_c^2} A_0 \Delta \bar{Q}(t) = \left[A_0 \frac{\Delta \bar{q}(t)}{\bar{k}_c(t)} + 2\Delta P_{c0} \frac{m_1}{\beta_{ж}} \exp(-\gamma_m t) \right] \frac{r_0^2(t)}{r_c^2} \quad (5.12)$$

Здесь

$$\Delta \bar{Q}(t) = \int_0^t \Delta \bar{q}(t) dt$$

при

$r = r_c$ из (5.11) находим:

$$\Delta P_c(t) = \frac{A_0}{2} \frac{\Delta \bar{q}(t)}{\bar{k}_c(t)} \left(\ln \frac{r_0^2}{r_c^2} - 1 \right) \quad (5.13)$$

Определив $\frac{r_0^2}{r_c^2}$ из (5.12) и подставляя в (5.13), получим:

$$\Delta P_c(t) = \frac{A_0}{2} \frac{\Delta \bar{q}(t)}{\bar{k}_c(t)} \left[\ln \frac{8\partial \ell / r_c^2 \cdot A_0 \cdot \Delta \bar{Q}(t)}{A_0 \Delta \bar{q} / \bar{k}_c(t) + 2\Delta P_{c0} \cdot m_1 / \beta_{ж} \exp(-\gamma_m t)} - 1 \right] \quad (5.14)$$

Выражение (5.14) является основным общим соотношением для обработки результатов гидрогазодинамического исследования скважин, вскрывших пласт с ползучей средой. Представим это соотношение в более удобном для

обработки данных исследования скважинvide:

$$\psi(t) = \frac{\Delta P_c(t)}{\Delta \bar{q}(t)} = \frac{1}{\bar{k}_c(t)} \left\{ \frac{A_0}{2} [\ln F(t) + \varphi(t)] + B_0 \right\} \quad (5.15)$$

здесь

$$F(t) = \frac{\Delta \bar{Q}(t)}{\Delta \bar{q}(t)}, \quad B_0 = \frac{A_0}{2} \ln \frac{2,95 \delta l}{r_0^2};$$

$$\varphi(t) = \ln \bar{k}_c(t) - \ln \left[1 + \frac{2}{A_0} \Delta P_{co} \cdot \frac{\bar{k}_c(t)}{\Delta \bar{q}(t)} \cdot \frac{m_1}{\beta_{эс}} \exp(-\gamma_m t) \right]; \quad (5.16)$$

Рассмотрим наиболее простой случай $\Delta q(t) = 1$ т.е. $q(t) = 0$. Тогда уравнение (5.15) представляется в виде:

$$\Delta P_c(t) = \frac{1}{\bar{k}_c(t)} \left\{ \frac{A_0}{2} [\ln t + \varphi_0(t)] + B_0 \right\}, \quad (5.17)$$

где

$$\varphi_0(t) = \ln \bar{k}_c(t) - \ln \left[1 + \frac{2}{A_0} \Delta P_{co} \bar{k}_c(t) \frac{m_1}{\beta_{эс}} \exp(-\gamma_m t) \right]$$

Рассмотрим отдельные случаи.

1. В случае, когда можно пренебречь применением проницаемости пласта вследствие ползучей деформации пористой среды, из (5.15) при $k_1 = 0$ или $\bar{k}_{cp} = 1$ получаем

$$\Delta P_c(t) = \frac{A_0 \Delta \bar{q}(t)}{2} [\ln F(t) + \varphi_m(t)] + B_0 \Delta \bar{q}(t), \quad (5.18)$$

где

$$\varphi_m(t) = \ln \left[1 + \frac{2}{A_0} \Delta P_{co} \frac{m_1}{\beta_{эс}} \exp(-\gamma_m t) \right]$$

2. В случае, когда можно пренебречь изменением пористости пласта вследствие ползучей деформации пористой среды, из (5.17) при $m_1 = 0$ имеем

$$\Delta P_c(t) = \frac{1}{\bar{k}_c(t)} \left\{ \frac{A_0}{2} [\ln F(t) + \varphi_k(t)] + B_0 \right\} \quad (5.19)$$

где

$$\varphi_k(t) = \ln \bar{k}_c(t)$$

Проанализируем полученные формулы (5.15)-(5.19) при малых t , когда можно принять $\exp(-\gamma_k t) \approx \exp(-\gamma_m t) \approx 1$. Обработывая кривые восстановления давления в координатах $\Delta P_c(t)/\Delta \bar{q}(t)$ и $\ln F(t)$ в соответствии с формулой (5.15) или (5.17), определяем

$$\frac{A_0}{2\bar{k}_{co}}, \bar{k}_{co} = 1 - 0,5\Delta P_{co} \frac{k_{co}}{\gamma_k}, \frac{B_0}{k_{co}} + \frac{A_0}{2\bar{k}_{co}} \ln \frac{\dot{k}_{co}}{1 + \frac{2\bar{k}_{co}}{A_0} \Delta P_{co} \cdot \frac{m_1}{\beta_{ж}}}$$

или

$$\frac{B_0}{k_{co}} + \frac{A_0}{2\bar{k}_{co}} \varphi_0(0), \text{ где } \varphi_0(0) \text{ - значение } \varphi_0(t) \text{ при } t = 0. \text{ При}$$

достаточно больших t , когда можно принять $e^{-\gamma_k t} \approx e^{-\gamma_m t} = 0$ находим коэффициенты $\frac{A_0}{2}$ и B_0 . Таким образом, из най-

денных четырех коэффициентов нетрудно найти в отдельности $A_0, B_0, \frac{K_1}{\gamma_k}$ и m_1 . Как видно, при малых t угловой

коэффициент прямой $\frac{\Delta P_c(t)}{\Delta \bar{q}(t)}$ от $\ln F(t)$ равен $\frac{A}{2\bar{k}_{co}}$, что в

$\left(1 - \frac{\Delta P_{co}}{2} \cdot \frac{k_1}{\gamma_k}\right)$ раз меньше, чем угловой коэффициент прямой

при больших t . Отрезок, отсекаемый от нее $\frac{\Delta P_c(t)}{\Delta \bar{q}(t)}$, наоб-

орот, меньше. Отсюда вытекает, что зависимость (5.15) или (5.17)-(5.19) имеет двухслойный характер.

5.1.2. Теоретические кривые восстановления забойного давления скважин, вскрывших пласт с ползучей средой.

Рассмотрим наиболее простой случай не учета переменного притока жидкости в скважину после ее закрытия на устье. Формулу (5.17), полученную из общего решения (5.15) при $\Delta\bar{q}(t) = 1$, представим в виде:

$$\Delta P_c(t) = \frac{\frac{A_0}{2} \left\{ \ell n t + \ell n \bar{k}_c(t) - \ell n \left[1 + \frac{2}{A} \Delta P_{co} \cdot \bar{k}_c(t) \cdot \frac{m_1}{\beta_{жс}} \exp(-\gamma_m t) \right] \right\} + B_0}{\bar{k}_c(t)} \quad (5.20)$$

По формуле (5.20) были рассмотрены численные примеры при следующих данных:

$$\frac{A_0}{2} = 0,16 \text{ МПа}, \frac{2}{A_0} \Delta P_{co} = 31,25, B_0 = 1,16743 \text{ МПа}.$$

Варианты:

1. $k_1 = 0$ и $m_1 = 0$

2. $k_1 = 0$ и $\frac{m_1}{\beta_{жс}} = 0,005; 0,01; 0,05$ и $\gamma_m = 10^{-3}; 10^{-5}; 10^{-7}$.

3. $\frac{k_1}{\gamma_k} = 0,01; 0,05; 0,1$ и $\gamma_k = 10^{-3}; 10^{-5}; 10^{-7}$; $m_1 = 0$.

$m_1 = 0$, $k_1 / \gamma_k = 0,01; 0,05; 0,0$ и $\gamma_k = 10^{-3}; 10^{-5}; 10^{-7}$,

4. $\frac{m_1}{\beta_{жс}} = 0,005; 0,01; 0,05$ и $\gamma_m = 10^{-3}; 10^{-5}; 10^{-7}$

Для иллюстрации на рис. 5.1 представлены характерные теоретические КВД в координатах $\Delta P_c(t)$ и $\ell n t$. Результаты численных экспериментов по исследованию особенностей восстановления давления в пластах с ползучей средой позволяют отметить следующее.

Ползучесть пористой среды оказывает существенное

влияние на процесс восстановления давления. По характеру КВД в ползучем пласте имеют двухслойный вид. Начальные (прямолинейные и криволинейные) участки КВД в ползучей среде отличаются от КВД, полученных в недеформируемом пласте. Конечные же участки КВД как в ползучем, так и недеформируемом пластах совпадают и описываются одной прямой линией. Все КВД, полученные для различных условий влияния ползучести пористой среды после некоторого времени сливаются в точках, принадлежащих линии восстановления давления в недеформируемом пласте. Это объясняется тем, что начальные фильтрационные, энергетические и емкостные характеристики рассматриваемого пласта для всех вариантов приняты одинаковыми.

Установлено, что вследствие ползучей деформации пласта если изменяется только или преимущественно его проницаемость, то по сравнению с недеформируемым пластом процесс восстановления забойного давления скважин в пласте с ползучей средой на начальном участке, т.е. при меньших значениях времени, происходит быстрее, и поэтому КВД (кривые 3,4, рис 5.1) в координатах $\Delta P_c(t)$ и ℓnt располагаются выше. Если же изменяется только или преимущественно пористость пласта, процесс восстановления забойного давления в ползучем пласте замедляется и поэтому КВД (кривая 2) располагаются ниже.

Показано, что чем больше K_1 , тем быстрее происходит процесс восстановления давления. С увеличением же m_1 , происходит обратное процесс замедляется. Влияние γ_k и γ_m на характер КВД не так ощутимо.

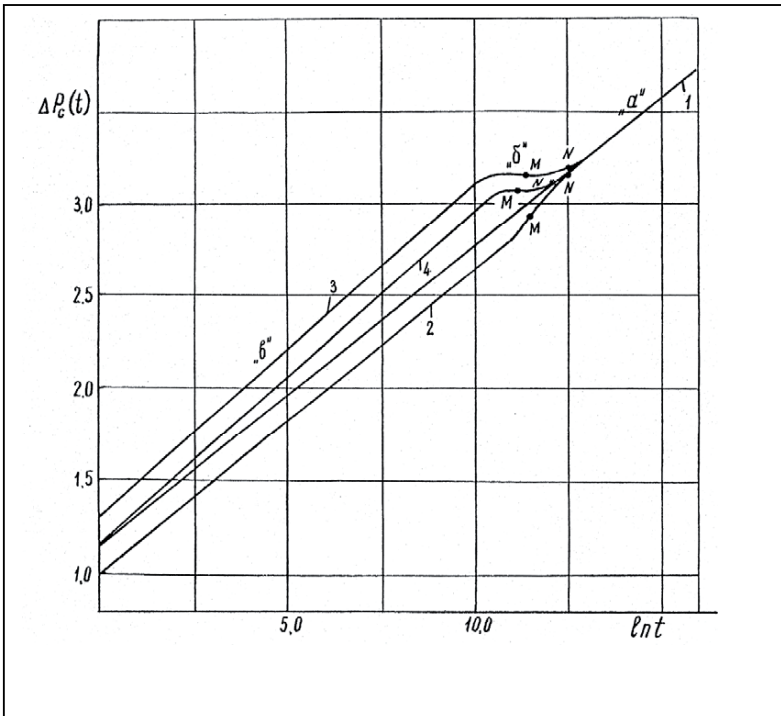


Рис.5.1. Кривые восстановления забойного давления в скважине в полулогарифмических координатах в случае пласта, обладающего свойствами ползучести.

$$1 - k_1 = 0; m_1 = 0; 2 - k_1 = 0; \gamma_m = 10^{-5}; \frac{m_1}{B_{жс}} = 0,05.$$

$$3 - \frac{k_1}{\gamma_k} = 0,05; \gamma_m = 10^{-5}; m_1 = 0.$$

$$4 - \frac{k_1}{\gamma_k} = 0,05; \gamma_k = 10^{-5}; \frac{m_1}{B_{жс}} = 0,05; \gamma_m = 10^{-5}.$$

5.1.3. Методика определения параметров пласта с ползучей средой по данным восстановления забойного давления

Как было установлено выше, теоретическая КВД скважины, вскрывшей пласт с ползучей средой, имеет три характерных участка: конечный прямолинейный, начальный прямолинейный и средний криволинейный. Представляя данные восстановления забойного давления скважины в соответствии с основной формулой (5.15) в координатах $\psi(t)$ и $\ln F(t)$, по конечному прямолинейному участку (участок «а», рис.5.1) находим два основных параметров

пласта: по значению $\frac{A_0}{2}$ гидропроводность $-\frac{K_{nl}h}{\mu_1} = \frac{q_0}{2\pi A_0}$ и

по значению B_0 – комплекс параметров $\frac{\partial \ell}{r_c^2} = \frac{1}{2,95} \exp(2B_0 / A_0)$.

По начальному участку (участок «в», рис 5.1) определяем по значению

$$A' = \frac{A_0}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Delta P_{co}}{2} \cdot \frac{K_1}{\gamma_k}}$$

параметр

$$\frac{k}{\gamma_k} = \frac{2}{\Delta P_{co}} \left(1 - \frac{A_0}{2A'} \right)$$

и по значению

$$B' = \frac{A_0}{2} \frac{1}{1 - \frac{\Delta P_{co}}{2} \cdot \frac{k_1}{\gamma_k}} \ln \frac{\left(1 - \frac{\Delta P_{co}}{2} \cdot \frac{k_1}{\gamma_k} \right) \cdot 2,95 \partial \ell / r_2^2}{1 + \frac{2}{A_0} \cdot \Delta P_{co} \cdot \left(1 - \frac{\Delta P_{co}}{2} \cdot \frac{k_1}{\gamma_k} \right) \frac{m_1}{\beta_{жк}}}$$

параметр

$$\frac{m_1}{\beta_{жс}} = \frac{1}{\Delta P_{co}} \left[\frac{A_0}{2} \exp\left(\frac{B_0}{A_0/2} - \frac{B'}{A'}\right) - A' \right]$$

По среднему участку (участок «б», рис 5.1) можно оценить параметры γ_k и γ_m .

Проиллюстрируем сказанное на примерах обработки КВД скважин.

1. Рассмотрим теоретические КВД без учета переменного притока, приведенные на рис.5.1, и определим параметры ползучего пласта. Сопоставим с заданными их значениями. Отметим лишь, что при обработке кривой 3 мы должны получить $\frac{m_1}{\beta_{жс}} = 0$, т.е. должны удовлетворяться ус-

ловия:

$$\left[\frac{A_0}{2} \cdot \exp \right] \left(\frac{2B_0}{A_0} - \frac{B'}{A'} - A' \right) = 0$$

А для кривой 2-обязательно должно удовлетворяться условие $\frac{k_1}{\gamma_k} = 0$, т.е. $A' = \frac{A_0}{2}$. Для кривой же й должны удовлетворяться оба условия. В таблице 5.1 приведены результаты определения.

Таблица 5.1

Параметры		B_0 МПа	A' МПа	B' МПа	K_1 / γ_k МПа ⁻¹	m_1 / γ_k с ⁻¹	$\gamma_k 10^5$ с ⁻¹	$\gamma_m 10^5$ с ⁻¹
Кривая	$A_0 / 2$ МПа							
1	0,160	1,167	0,160	1,167	0,0	0,0	0,0	0,0
2	0,160	1,167	0,160	1,017	0,0	0,05	0,0	0,98
3	0,160	1,167	0,183	1,310	0,05	0,0	1,04	0,0
4	0,160	1,167	0,183	1,152	0,05	0,05	1,02	0,99

В результате обработки для обеих кривых по их конечным участкам были определены $\frac{A_0}{2} = 0,16$ и $B_0 = 1,167 \text{ МПа}$, т.е. заданные значения этих коэффициентов. По начальным участкам кривых 2 и 3 были определены A' и B' , которые также занесены в табл. 5.1. Далее, используя найденные значения $\frac{A_0}{2}, B_0, A'$ и B' , для обеих кривых были вычислены значения параметров $\frac{k_1}{\gamma_k}$ и $\frac{m_1}{\beta_{эс}}$. Для кривой 3 имеем

$$\frac{k_1}{\gamma_k} = 0,4 \left(1 - \frac{0,16}{0,183} \right) = 0,05 \text{ МПа}^{-1}$$

$$\frac{m_1}{\beta_{эс}} = 0,2 \left[0,16 \exp \left(\frac{1,167}{0,16} - \frac{1,31}{0,183} \right) - 0,183 \right] = 0$$

Аналогичным путем для кривой 2 находим

$$\frac{k_1}{\gamma_k} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{m_1}{\beta_{эс}} = 0,05 \text{ С}^{-1}$$

Как видно, определяемые значения фильтрационных параметров A_0 и B_0 , а также параметров, характеризующих ползучие свойства пласта $\frac{k_1}{\gamma_k}$ и $\frac{m_1}{\beta_{эс}}$, полностью совпадают с заданными их значениями.

Рассмотрим теперь возможность оценки параметров ползучести γ_k и γ_m . Для этой цели проанализируем входящую в (5.16) функцию $\varphi(t)$ при $\Delta \bar{q}(t) = 1$, т.е. $\varphi_0(t)$. На рис 5.2 приведены типичные зависимости $\varphi_0(t)$ от t для рассмотренных выше четырех вариантов. Отметим что в случае $m_1 = 0$ и $k_1 = 0$, т.е. при отсутствии ползучей

деформации среды имеет место $\varphi_0(t)=0$. Как видно, функция $\varphi_0(t)$ в начале практически не зависит от времени, а при больших t она резко уменьшается. Показано, что для оценки параметра γ_k можно пользоваться конечной частью криволинейного, переходного участка «б» кривых 2-4, для которой с достаточной точностью можно принимать $\varphi_0(t)=0$. Удобным при этом для использования является точка N сливания кривых 2-4 с прямой 1 с координатами t_N и $\Delta P_c(t_N)$. С учетом сказанного, для вычисления γ_k предлагается следующая формула, полученная из (5.15):

$$\gamma_k = \frac{1}{t_N} \ln \left(\frac{\Delta P_{co}}{2} \frac{K_1}{\gamma_k} \right) \left[1 - \frac{A_0 / 2 \ln t_N + B_0}{\Delta P_c(t_N)} \right]^{-1} \quad (5.21)$$

С использованием формулы (5.21) была осуществлена оценка величины параметра ползучести γ_k для кривой 3 по следующим данным, соответствующим точке

N ; $t_N = 3 \cdot 10^5$ с; $\Delta P_c(t_N) = 3,20422$ МПа; $\ln t_N = 12,61154$; $\varphi_0(t_N) = 0,006$. как видно, в расчетах с большой точностью можно пренебречь по сравнению с $\ln t_N$ величиной $\varphi_0(t_N)$.

С учетом значений ΔP_{co} , $\frac{A_0}{2}$, B_0 и $\frac{K_1}{\gamma_k}$ получим:

$$\gamma_k = \frac{1}{3} 10^{-5} \ln 20,674 = \frac{3,13}{3,0} 10^{-5} = 1,04 \cdot 10^{-5} \approx 10^{-5} \text{ C}^{-1}$$

Отметим, что аналогичным путем для кривых 2 и 4 определены соответственно $\gamma_k = 10^{-5}$ и $\gamma_k = \infty$. Найденные значения параметра γ_k полностью совпадают с заданными.

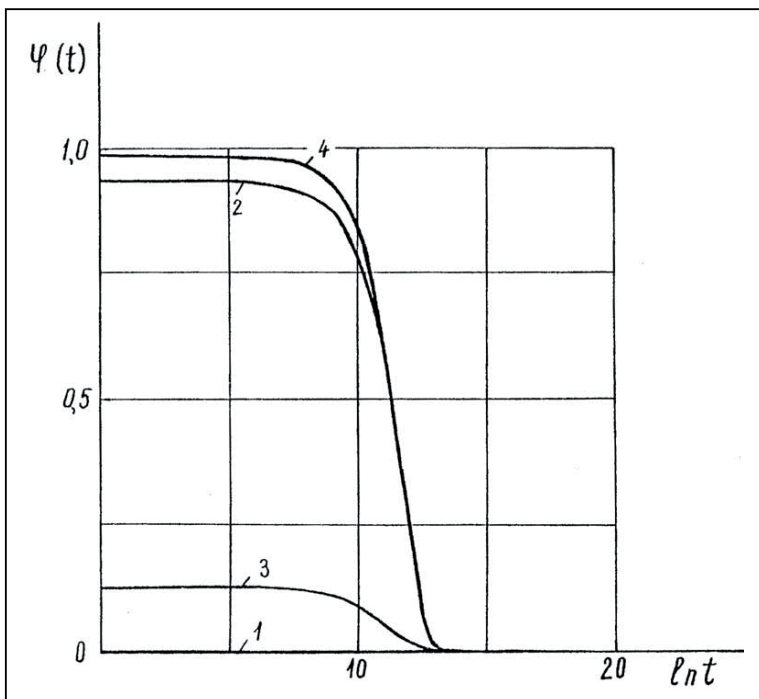


Рис.5.2. Зависимость $\gamma_0(t)$ от времени.

1 — $m_1 = 0$; $k_1 = 0$; 2 — $k_1 = 0$; $m_1 = 0,05$;

$\gamma_m = 10^{-5}$; 3 — $m_1 = 0$; $k_1 = 0,05$; $\gamma_k = 10^{-5}$;

4 — $k_1 = 0,05$; $m_1 = 0,05$; $\gamma_m = 10^{-5}$;

$\gamma_m = 10^{-5}$.

Было установлено, что для оценки параметра γ_m с достаточной точностью можно пользоваться параметрами точки «М» кривых 2 и 4, соответствующей середине криволинейной части с координатами t_M и $\Delta P_c(t_M)$. Из (5.17) с учетом выражения $\varphi_0(t)$ имеем:

$$\gamma_m = \frac{1}{t_M} \ln n = \frac{2\Delta P_{co} / A_0 \cdot m_1 / \beta_{ж} \cdot \bar{K}_c(t_M)}{K_c(t_M) \left\{ \exp \left[-\frac{2}{A_0} \Delta P_c(t_M) \bar{K}_c(t_M) + \ell n t_M + 2B_0 / A_0 \right] \right\} - 1} \quad (5.22)$$

По формуле была рассчитана величина γ_m для кривых 2 и 4 по координатам точки М. Для кривой 2 было определено $\gamma_m = 0,98 \cdot 10^{-5} c^{-1}$, а для кривой 4- $\gamma_m = 0,99 \cdot 10^{-5} c^{-1}$. Эти значения γ_m практически не отличаются от заданных. Отметим, что для кривой было определено $\gamma_m = \infty$. Вычисленные значения γ_k и γ_m также занесены в табл. 5.1.

Таким образом, на основе обработки теоретических кривых восстановления забойного давления разработана эффективная методика определения фильтрационных и ползучих свойств пласта.

5.2. Методика определения параметров ограниченного пласта с ползучей средой.

Рассмотрим процесс восстановления давления в ползучем ограниченном пласте с радиусом r_k (рис.5.1,б), разрабатываемом одной центральной скважиной. Для описания процесса восстановления забойного давления скважины в ограниченном пласте с ползучей средой решается уравнение (5.2) с учетом (5.8) и (5.9) при следующих начальных и граничных условиях:

$$u(r,0) = 0 \quad (5.23)$$

$$u(r_c t) = \Delta P_c(t) \quad (5.24)$$

$$\left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r \rightarrow r_c} = -A_0 \frac{\Delta \bar{q}(t)}{\bar{K}_c(t)} \quad (5.25)$$

$$u(r_k, t) = 0 \quad (5.26)$$

Применяя метод осреднения к уравнению. (5.2), при условиях (5.23)-(5.26), получим

$$\Delta P_c(t) + \alpha_2 \phi(t) = \alpha_2 (A_0 + B_2) \Delta \bar{Q}(t) + B_2 \frac{\Delta \bar{q}(t)}{\bar{k}_c(t)} - \frac{\Delta P_{co}}{\beta_{жс}} \frac{m_1}{\gamma_m} [1 - \exp(-\gamma_m t)] \quad (5.27)$$

где $\phi(t) = \int_0^t \bar{k}_c(t) \Delta P_c(t) dt, \quad B_2 A_0 (\ell n r_k / r_c - 1)$

$$A_0 = \frac{\mu q_0}{2\pi k_{нп} h}, \quad \alpha_2 = \frac{8\delta \ell}{r_k^2}$$

Уравнение (5.27) является основным аналитическим соотношением для обработки КВД скважин, вскрывших пласт с ползучей средой. Отметим, Что при $k_1 = 0$ и $m_1 = 0$ из (5.27) получим известную формулу работы [101].

Исследуем характер восстановления давления в ползучем пласте. Для этой цели рассмотрим случай $\bar{k}_c(t) = 1$ и $\Delta \bar{q}(t) = 1$. Тогда из (5.27) имеем:

$$\frac{d\Delta P_c(t)}{dt} + \alpha_2 \Delta P_c(t) = \alpha_2 (A_0 + B_2) - \Delta P_{co} \frac{m_1}{\beta_{жс}} \exp(-\gamma_m t) \quad (5.28)$$

Интегрируя уравнение (5.28) при $\Delta P_c(t) = 0$ при $t = 0$ получим

$$\Delta P_c(\bar{t}) = (A_0 + B_2) [1 - \exp(-\bar{t})] + \frac{\Delta P_{co}}{\beta_{жс}} \frac{\bar{\gamma}_m \bar{m}_1}{1 - \bar{\gamma}_m} [\exp(-\bar{t}) - \exp(-\bar{\gamma}_m \bar{t})] \quad (5.29)$$

где $\bar{t} = \alpha_2 t, \bar{m}_1 = \frac{m_1}{\gamma_m}, \quad \bar{\gamma}_m = \frac{\gamma_m}{\alpha_2}$

При $\bar{\gamma}_m = 1$ из (5.29) находим:

$$\Delta P_c(\bar{t}) = (A_0 + B_2)[1 - \exp(-\bar{t})] - \frac{\Delta P_{co}}{\beta_{жс}} \bar{m}_1 \bar{t} \exp(-\bar{\gamma}_m \bar{t}) \quad (5.30)$$

Формула (5.29) или (5.30) показывает, что если ползучесть пласта влияет лишь на его пористость, то процесс восстановления давления по сравнению с недеформируемой средой ползучего пласта замедляется. Причем, чем больше m_1 , тем больше это замедление. Это видно также из рис.5.3, где приведены теоретические КВД, рассчитанные по формуле (5.30) при следующих данных:

$$\Delta P_{co} / \beta_{жс} = 10^3 \text{ МПа}; \bar{m}_1 = 0; 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ МПа} \quad \text{и} \quad 10^{-3} \text{ МПа}^{-1};$$

$$A_0 + B_2 = 3,8 \text{ МПа}^{-1} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = 8 \cdot 10^{-4}.$$

Например, за время $\bar{t} = 1,0$ в ползучем пласте $\Delta P_c(t)$ восстанавливается на 10 и 7% соответственно при $\bar{m}_1 = 10^{-3}$ и $\bar{m}_1 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ меньше, чем в недеформируемом пласте со сжимаемой жидкостью. Причем, указанная разница в начальной стадии процесса восстановления давления больше, а в конечной - меньше.

Далее, из (5.30) видно, что чем больше величина депрессии ΔP_{c0} , тем меньше темп восстановления давления в пласте с ползучей средой. Увеличение $\beta_{жс}$ приводит к уменьшению влияния ползучести пласта на процесс восстановления давления в нем.

Приведем теперь методику определения параметров ползучего пласта. Как уже было отмечено, формула (5.27) является основным соотношением для параметров пласта. Для простоты рассмотрим случай $\Delta \bar{q}(t) = 1$ и $\bar{k}_c(t) = 1$. Тогда формула (5.27) примет вид:

$$\psi(t) = \Delta P_c(t) + \alpha_2 \Delta P(t) = B_2 + \alpha_2 (A_0 + B_2)t - \frac{\Delta P_c m_1}{\beta_{жс} \gamma_m} [1 - \exp(-\gamma_m t)] \quad (5.31)$$

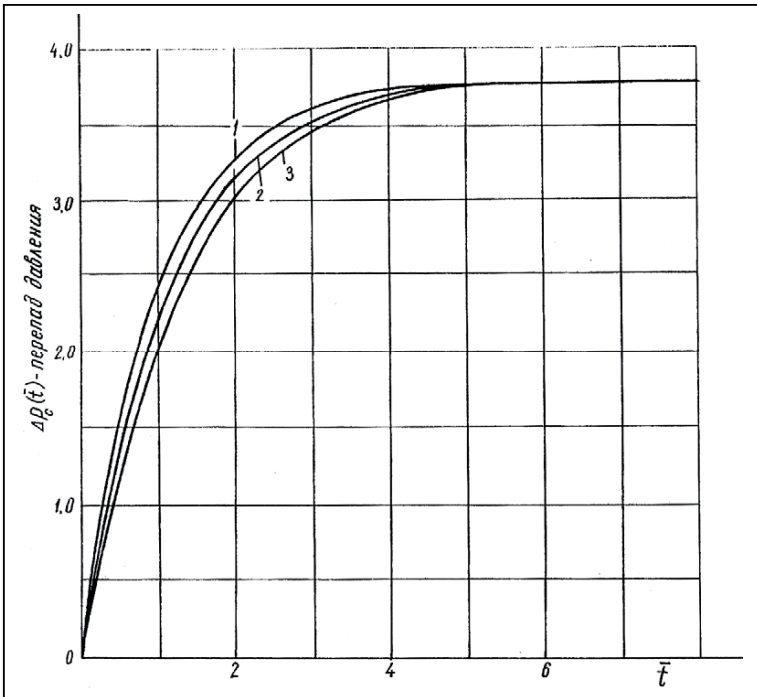


Рис .5.3. Теоретические КВД.

$$1 - \overline{m_1} = 0; \quad 2 - \overline{m_1} = 0,5 \cdot 10^{-3}; \quad 3 - \overline{m_1} = 10^{-3}.$$

При малых t (т.к. $\exp(-\gamma_m t) \approx 1$) и при больших t (т.к. $\exp(-\gamma_m t) = 0$), уравнение (5.31) можно представить в виде:

$$\varphi_0(t_n) = \frac{1}{\alpha_2(A_0 + B_2)} + \frac{1}{A_0 + B_2} F_0(t_n) \quad (5.32)$$

По формуле (5.32) были обработаны все три теоретические КВД. Как видно из рис. 5.4, точки всех КВД

ложатся на одну прямую, по угловым коэффициентам которой были определены практически точно заданные значения параметров:

$$A_0 + B_2 = 3,8 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = 8 \cdot 10^{-4}$$

Далее, подставляя значения α_2 в (5.31), определяют $\psi(t)$ и представляют КВД теперь в координатах $\psi(t)$ и t . Очевидно, что зависимость $\psi(t)$ и t в соответствии с формулой (5.31) только в случае $m_1 = 0$, т.е. в недеформируемом пласте со сжимаемой жидкостью, будет представлена одной прямой линией (рис.5.5). В ползучих пластах эта зависимость (рис.5.6-5.7) имеет три характерных участка - два прямолинейных (участки «а» и «в») и криволинейный переходной участок («б»). По угловым коэффициентам прямолинейного участка «а», который соответствует большим t , определяем $\alpha_2(A_0 + B_2)$ и

$$\bar{B}_1 = B_2 - \frac{\Delta P_c}{\beta_{жс}} \cdot \frac{m_1}{\gamma_m}. \quad \text{По угловым коэффициентам участка}$$

«в», соответствующего малым t , определяем $\alpha_2(A_0 + B_2)$ и B_2 . Очевидно, что найденные по (5.32) и (5.31) коэффициенты α_2 и $A_0 + B_2$ должны быть равными. С большой точностью для кривых (5.5)-(5.7) были определены: $B_2 = 3,3$;

$$A_0 + B_2 = 3,8 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = 8 \cdot 10^{-4}. \quad \text{Кроме того, определено: для}$$

кривой (5.6) $\Delta P_c / \beta_{жс} \cdot m_1 / \gamma_m = 0,5$ и для кривой (5.7) -

$$\frac{\Delta P_c}{\beta_{жс}} \cdot \frac{m_1}{\gamma_m} = 1,0. \quad \text{Учитывая, что } \Delta P_c / \beta_{жс} = 10^3, \quad \text{имеем}$$

$m_1 / \gamma_m = 0,5 \cdot 10^{-3}$ для кривой (5.6) и $m_1 / \gamma_m = 10^{-3}$ для кривой (5.7), т.е то, что было задано при расчете кривых восстановления давления (2) и (3) рис.5.3 соответственно.

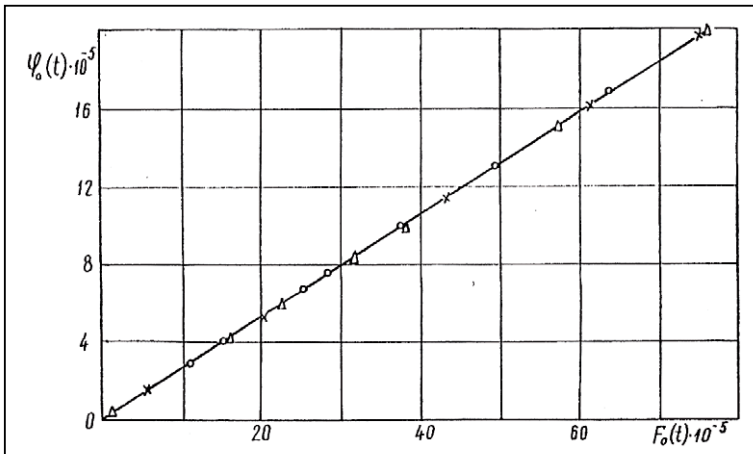


Рис .5.4. Теоретические КВД в координатах $\lambda_0(t)$ и $F_0(t)$.
 1 - $x - \overline{m}_1 = 0$; 2 - $\Delta - \overline{m}_1 = 0,5 \cdot 10^{-3}$; 3 - $0 - \overline{m}_1 = 10^{-3}$.

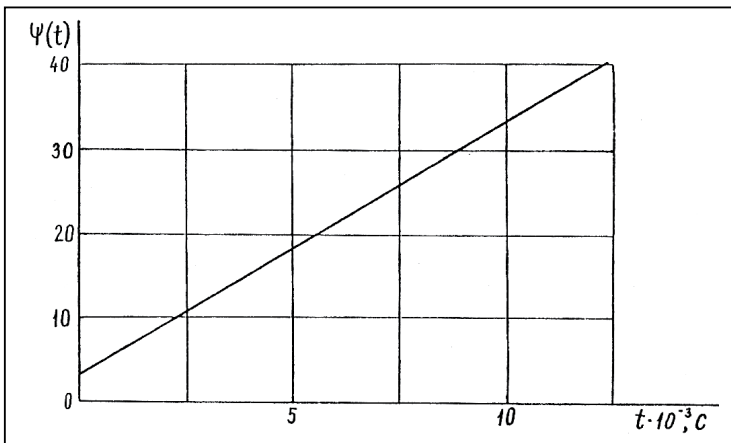


Рис .5.5. Теоретические КВД в координатах $\psi(t)$ и t при $m_1 = 0$.

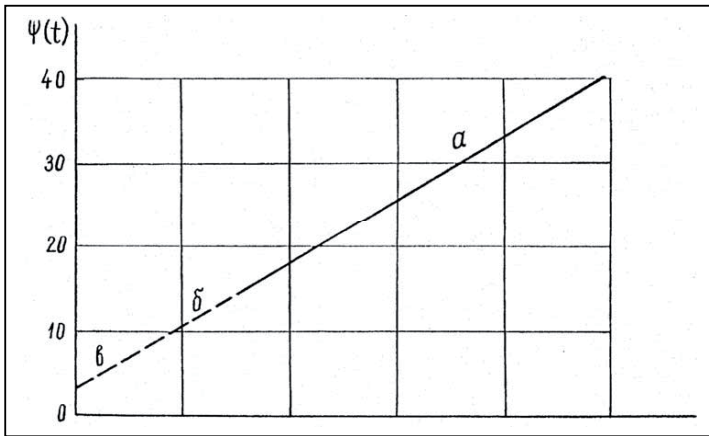


Рис .5.6. Теоретические КВД в координатах $\psi(t)$
и t при $\overline{m_1} = 0,5 \cdot 10^{-3}$.

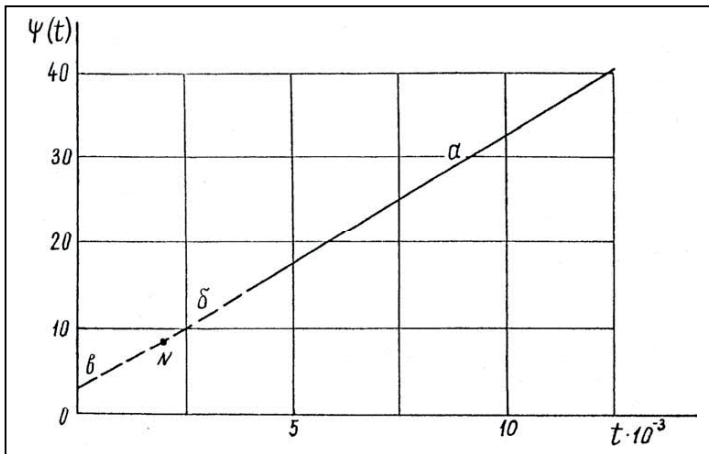


Рис .5.7. Теоретические КВД в координатах $\psi(t)$
и t при $\overline{m_1} = 10^{-3}$.

Таким образом, обрабатывая КВД последовательно по формулам (5.32) и (5.31), можно определять фильтрационные параметры (α_2, A_0, B_2) и свойства ползуности m_1 / γ_m .

По криволинейному переходному участку «б» КВД, представленных в соответствии с формулой (5.31) в координатах $\psi(t)$ и t , оказалась возможной оценка параметра γ_k и, следовательно, с использованием координаты точки, находящейся на линии участка «б». Итак, для точки N из (5.31) получим:

$$\gamma_m = \frac{1}{t_N} \left\{ \ell n \right\} \frac{\Delta P_c}{\beta_{жс}} \bar{m}_1 - \ell n \left[\psi(t_N) - B_2 - \alpha_2 (A_0 + B_2) t_N + \frac{\Delta P_c}{\beta_{жс}} \cdot \bar{m}_1 \right] \quad (5.33)$$

Для иллюстрации возьмем точки N на рис. 5.7 с координатам и $t_N = 2 \cdot 10^3$ и $\psi(t_N) = 8,58$. Учитывая что $\Delta P_c / \beta_{жс} = 10^3$ и $\bar{m}_1 = 10^{-3}$; $B_2 = 3,3$; $A_0 + B_2 = 3,8$ и $\alpha_2 = 8 \cdot 10^{-4}$, из (8.33) находим:

$$\gamma_m = 0,5 \cdot 10^{-3} [-\ell n(9,582 - 9,38)] = 0,805 \cdot 10^{-2} \approx 8 \cdot 10^{-4} C^{-1}$$

Отметим, что при вычислении $\Delta P_c(t)$ величина γ_m была принята равной $\alpha_2 = 8 \cdot 10^{-4} c^{-1}$; т.е. найденное значение полностью совпадает с заданным его значением.

Таким образом, как видно, разработанная методика позволяет достаточно надежно определять как фильтрационные, так и ползуние свойства пласта.

5.2. Примеры определения фильтрационных и ползучих свойств пласта по данным восстановления или падения забойного давления.

Пример 1. В таблицах 5.2 и 5.3 приведены данные, соответствующие восстановлению забойного давления, по данным скважины 17 месторождения И Даги ПО «Сахалин-нефть». Кривая восстановления давления (КВД) была снята с 26 по 31 июля 1975г. глубинным манометром МГГ-2у №280 (предел измерения 18,0 МПа) в течение 84 часов 20 минут после длительной работы скважины на 9мм штуцере и с дебитом жидкости 15 т/сут. (14 т/сут. Нефти и 1 т/с воды), а кривая падения давления КПД-31 июля 1975г. после пуска скважины на 6мм штуцере с дебитом жидкости 6,6 т/сут. В течение 24 часов 50 минут. Удельный вес нефти равен 0,846 м³/т, а объемный коэффициент- 1,263 м³/сут. По лабораторным данным $\beta_{жс} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}$. Эффективная толщина пласта $h = 10 \text{ м}$.

На рис. 5.8 и 5.9 приведены КВД и КПД СКВ. 17 в координатах $\Delta P_c(t)$ и ℓnt в соответствии с формулой 5.20. как видно, эти кривые имеют «двухслойный» вид и идентичны с теоретическими кривыми восстановления давления, приведенными на рис. 5.1 (кривые 3 и 4). Однако, процесс протекания ползучей деформации при восстановлении забойного давления происходит несколько медленнее, чем при падении давления, хотя при этом общий характер кривых сохраняется.

Переходной промежуточный участок «б» при восстановлении давления значительно больше. Длительность периода стабилизации забойного давления и характер КВД (или КПД) говорит о том, что в пласте происходит ползучая деформация и поэтому их обработка осуществляется по разработанной выше методике. Согласно разработанной методике по конечному прямолинейному участку «а» были определены $A'_{0/2}$ и B'_2 .

Таблица 5.2.

t, c	$\Delta P, \text{МПа}$	t, c	$\Delta P, \text{МПа}$
0	0	58200	4,08
600	1,393	63600	4,09
1200	2,17	65400	4,10
1800	2,70	67200	4,11
2400	2,89	69000	4,13
300	3,01	70800	4,17
3600	3,10	76200	4,20
4200	3,20	78000	4,20
4800	3,23	85200	4,25
5400	3,28	145200	4,58
6000	3,33	Ъ145800	4,63
7200	3,43	146400	4,64
7800	3,44	153600	4,65
8400	3,47	157200	4,67
9600	3,49	162600	4,68
10200	3,57	164400	4,70
17400	3,59	240600	4,95
18000	3,72	243000	4,99
18600	3,73	246600	4,95
19800	3,74	243000	4,99
21600	3,82	246600	5,04
23400	3,85	250200	5,05
25200	3,87	253800	5,06
27000	3,92	257400	5,08
28800	3,94	265800	5,14
30800	3,98	269400	5,15
32400	3,99	273000	5,17
34300	3,99	276600	5,18
36000	3,99	280200	5,19
37800	3,99	283800	5,20
41400	3,99	291000	5,22
54600	4,01	294600	5,23
56400	4,05		

Таблица 5.3

t, c	$\Delta P_c, \text{МПа}$
0	0
600	0,65
1200	10.90
1800	12,80
2400	1,40
3000	1,43
3600	1,475
4200	1,40
6000	1.39
7800	1.40
9600	1.43
11400	1,46
13200	1,55
17400	1,54
18000	1,52
18600	1,71
20400	1,83
22200	1,87
24000	1,87
25800	1,87
27600	1,93
29400	1,99
21300	2,04
33000	2.04
34800	2,05
36600	2,09
38400	2,09
40200	2,10
42000	2,12
43800	2,13
45600	2,13
47400	2.13
49200	2.13
51000	2,14
69600	1,71
89400	2,14

С использованием метода «наименьших квадратов» Аналогичным путем по начальному прямолинейному участку «в» были определены A' и B' .

Зная эти коэффициенты, можно определить коэффициент гидропроводности пласта $K_{пл} h / \mu$ и комплекс параметров $\partial \ell / r_c^2$, а также K_1 / γ_k и $m_1 / \beta_{ж}$. Например, для КВД (рис. 5.9) были определены $A_0 / 2 = 0,6526$ и $B_2 = -3,138$; $A' = 1,225$ и $B' = -6,79$.

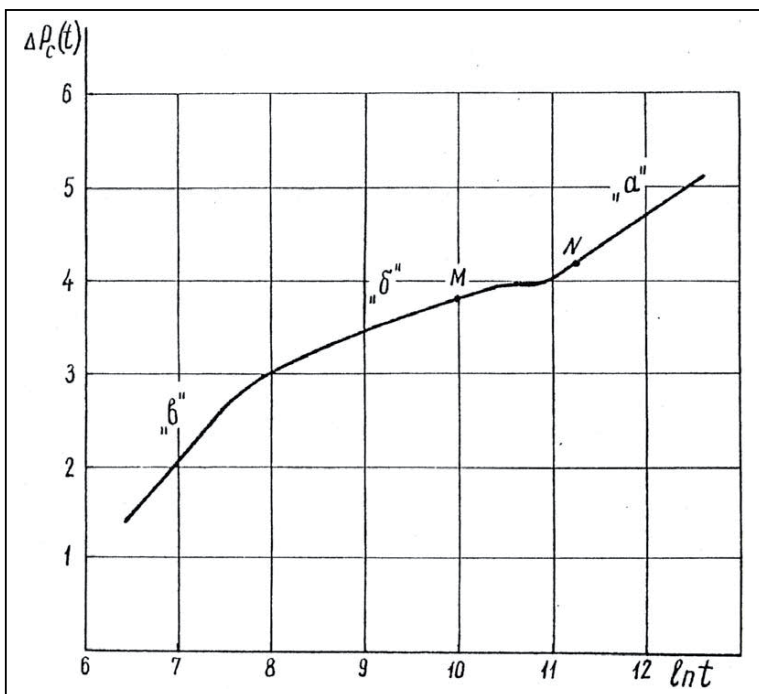


Рис. 5.8. КВД скв. 17 месторождения В.Даги.

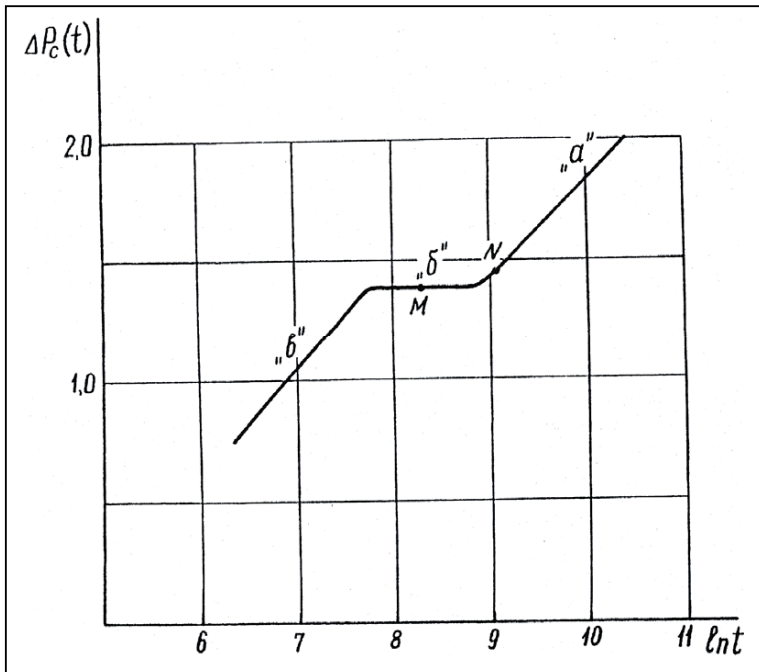


Рис. 5.9. КПД скв. 17 месторождения В.Даги.

Далее, используя их и учитывая, что $\Delta P_c = 5,23 \text{ МПа}$ и $\beta_{\text{жс}} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}$, вычисляем:

$$K_1 / \gamma_k = 2 / 5,23(1 - 0,6526 / 1,225) = 0,1787;$$

$$K_1 / \gamma_k = 0,1787;$$

$$m_1 / \beta_{\text{жс}} = 1 / 5,23$$

$$[0,6526 \exp(-3,138 / 0,6526 + 6,79 / 1,225) - 1,225] = 0,01;$$

$$m_1 / \beta_{\text{жс}} = 0,01.$$

Далее, можно оценить значения γ_k и γ_m . В соответствии с формулой 5.21 по координатам точки N определяется γ_k , а по формуле (5.22) с использованием координаты точки «М» — γ_m для точки «N» имеем $t_N = 83400$, $\ell n t_N = 11,3314$ и $\Delta P_c(t_N) = 4,24 \text{ МПа}$. Тогда по формуле (5.21) находим

$$\gamma_k = 1/65400 \cdot \ell n \frac{2,615 \cdot 0,1787}{1 - (0,6526 \cdot 11,09 - 3,138)/4,1} = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ C}^{-1}$$

$$\gamma_k = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ C}^{-1}$$

Для точки М имеем: $t_M = 210000 \text{ с}$; $\ell n t_M = 9,98$ и $\Delta P_c(t_M) = 3,82$

В соответствии с формулой (5.8) определяем

$$\bar{K}_c(t_M) = 1,2615 \cdot 0,1787 \cdot \exp(-5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,216 \cdot 10^5) = 0,85$$

$$\bar{K}_c(t_M) = 0,85$$

По формуле (5.22) находим

$$\gamma_m = \frac{1}{21600} \ell n \frac{5,23/0,6526 \cdot 0,02531 \cdot 0,85}{0,85 \cdot \exp\{-1/0,6526[3,82 \cdot 0,85 - (0,6526 \cdot 9,98 - 3,138)]\} - 1} = 2,3 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_m = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ C}^{-1}$$

и, наконец, определяем отношение

$$\frac{m_1}{\gamma_m} = \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{2,3 \cdot 10^{-4}} = 0,05, m_1 / \gamma_m = 0,05$$

Аналогичным путем была обработана КПД скважины 17. Найденные параметры также занесены в табл.5.4. Как видно, определенные как по КВД, так и по КПД СКВ.17 отдельные параметры между собой отличаются практически незначительно, что еще раз подтверждает правильность

разработанной методики.

Пример 2. КПД по скважине 207 месторождения Календо ПО «Сахалиннефть» в течение 110 часов глубинным монометром № 3716 показаны с пределом измерения 27 МПа. Результаты промысловых исследований приведены в табл.5.5. на рис. 5.10 дана КПД в СКВ. 207в координатах $\Delta P_c(t)$ и ℓnt . Результаты обработки также занесены в табл. 5.5.

Таблица 5.4.

Результаты определения параметров пласта по КВД и КПД

№№ скважин	Тип кри-вых	$A_0 / 2$ МПа	B_2 МПа	A' МПа	B' МПа	K_1 / γ_k МПа ⁻¹
17	КВД	0,6526	-3,14	1,23	-6,79	0,18
17	КПД	0,42	-2,35	0,47	-2,45	0,10
207	КПД	2,38	-14,14	3,84	-20,81	0,06
№№ скважин	Тип кри-вых	γ_k с ⁻¹	K_1 МПа ⁻¹ с ⁻¹	m_1 МПа ⁻¹ с ⁻¹	γ_m с ⁻¹	m_1 / γ_m МПа ⁻¹
17	КВД	$5 \cdot 10^{-5}$	$0,89 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	0,05
17	КПД	$6,5 \cdot 10^{-5}$	$0,65 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	0,08
207	КПД	$5 \cdot 10^{-5}$	$1,68 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	0,07

Таблица 5.5

t, c	$\Delta P, \text{МПа}$	t, c	$\Delta P, \text{МПа}$	t, c	$\Delta P, \text{МПа}$
0	0	21600	9,61	85200	12,36
600	0,62	22200	9,71	88800	12,42
1200	3,20	22800	9,82	91800	12,49
1800	5,62	23400	9,92	95400	12,54
2400	6,78	24000	10,02	99000	12,59
3000	6,92	24600	10,12	102600	12,65
3600	7,00	25200	10,20	106200	12,72
4200	7,07	25800	10,24	109800	12,80
4800	7,18	26400	10,28	113400	12,92
5400	7,35	27000	10,30	117000	12,94
6000	7,44	27600	10,33	118500	12,94
6600	7,51	28200	10,37	122100	12,94
7200	7,64	28800	10,43	125700	12,94
7800	7,5	29400	10,45	129300	12,94
8400	7,82	30000	10,48	132900	12,94
9000	7,85	30600	10,53	136500	12,94
9600	7,96	31200	10,59		
11400	8,27	31800	10,64		
12000	8,32	43800	11,33		
12600	8,42	45600	11,37		
13200	8,53	47400	11,42		
13800	8,61	48600	11,49		
14400	8,66	50400	11,56		
15000	8,74	52200	11,58		
15600	8,78	54000	11,63		
16200	8,84	55800	11,68		
16800	8,89	57600	11,73		
17400	8,97	61200	11,79		
18000	9,09	64800	11,84		
18600	9,15	67200	11,89		
19200	9,22	70800	11,99		
19800	9,30	74400	12,10		
20400	9,43	78000	12,20		
21000	9,51	81600	12,26		

Сопоставление полученных параметров показывает, что по месторождению Календо ползучая деформация среды большее влияние оказывает на пористость пласта, чем на ее проницаемость.

Для обоих месторождений характерным является ползучесть пористой среды, вследствие чего происходит очень медленная стабилизация давления как в процессе его восстановления, так и падения.

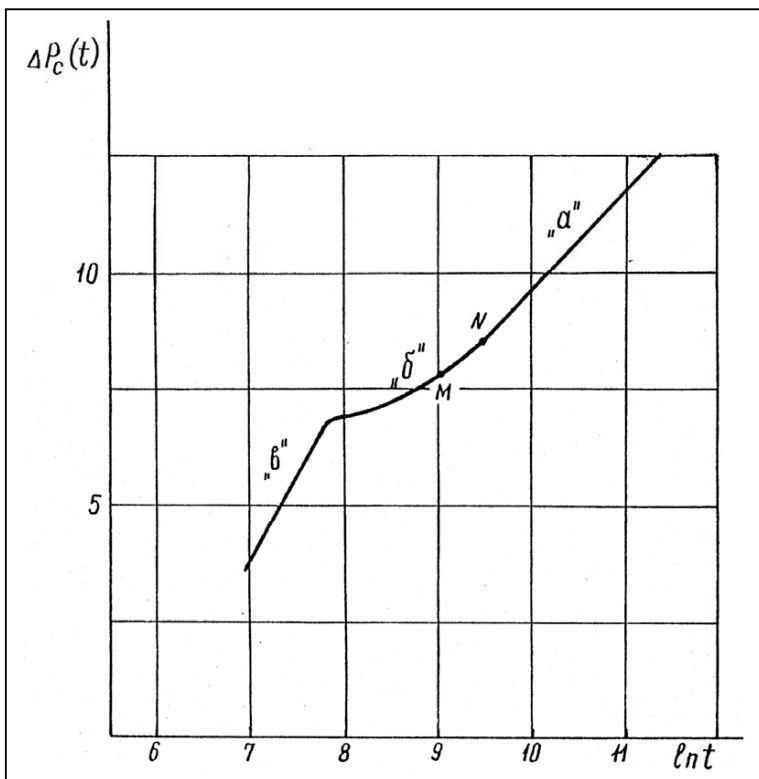


Рис. 5.10. КПД скв. 207 месторождения Календо.

Глава VI.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ ЗАВОДНЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ДЕФОРМИРУЕМОГО ОДНОРОДНО-АНИЗОТРОПНОГО ПЛАСТА

6.1. Изучение влияния анизотропии проницаемости на коэффициент охвата

Как отмечено во введении, одним из факторов, влияющих на показатели процесса разработки нефтяных месторождений, является анизотропия пластов по проницаемости.

Исследованиями фильтрации жидкостей в анизотропных по проницаемости гранулярных средах занимался целый ряд авторов. Обзор этих работ можно найти.

Исследования в этой области показали, что свойством анизотропии по проницаемости, в основном, обладают трещиноватые пласты, проницаемость которых зависит не только от направления фильтрации, но и от пластового давления.

Простейшие фильтрационные потоки в анизотропных деформируемых коллекторах изучались в работах Е.С.Ромма, Г.И.Джалалова и др.

В данной главе с применением метода электромоделирования решены задачи фильтрации жидкости к скважинам при различной системе их расстановки в деформируемом анизотропном пласте.

Из-за сложности и трудоемкости получения аналитического решения, в данной работе приводятся полученные с помощью методов ЭГДА результаты исследований влияния анизотропии проницаемости на коэффициент охвата за безводный период при площадном заводнении деформируемого анизотропного пласта, проницаемость которого

зависит от угла ориентации и динамического пластового давления. При этом предполагается, что фильтрация жидкости подчиняется нелинейному закону. Взаимно перпендикулярные главные оси тензора анизотропии совпадают с осями координат x, y . Угол между осями x и \bar{x} равен ν , экстремальные начальные значения проницаемости в направлениях x, y различны (рис.6.1).

В этом случае установившееся движение жидкости будет описываться следующим нелинейным дифференциальным уравнением [34]:

$$k_x^0 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{k}_x(P) \bar{\rho}(P)}{\bar{\mu}(P)} \frac{\partial P}{\partial x} \right] + k_y^0 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\bar{k}_y(P) \rho(P)}{\bar{\mu}(P)} \frac{\partial P}{\partial y} \right] = 0 \quad (6.1)$$

где $\bar{k}_x(P), \bar{k}_y(P)$ - функции проницаемости в направлении оси \bar{x} и \bar{y} соответственно: k_x^0, k_y^0 - начальные значения проницаемости в направлении осей \bar{x}, \bar{y} при $P = P_0$:

$$\bar{\mu}(P) = \frac{\mu(P)}{\mu(P_0)}; \quad \bar{\rho}(P) = \frac{\rho(P)}{\rho(P_0)},$$

$\mu(P), \rho(P), \mu(P_0), \rho(P_0)$ - значения вязкости и плотности жидкости, соответственно, при текущем и начальном пластовом давлении.

P_0 - начальное пластовое давление. Считая, что закон изменения проницаемости от пластового давления по каждой координате одинаков, т.е. $\bar{k}_x(P) = \bar{k}_y(P) = f(P)$ и вводя функцию

$$\Phi(P) = \int_0^P \frac{f(P) \bar{\rho}(P)}{\bar{\mu}(P)} dP, \quad (6.2)$$

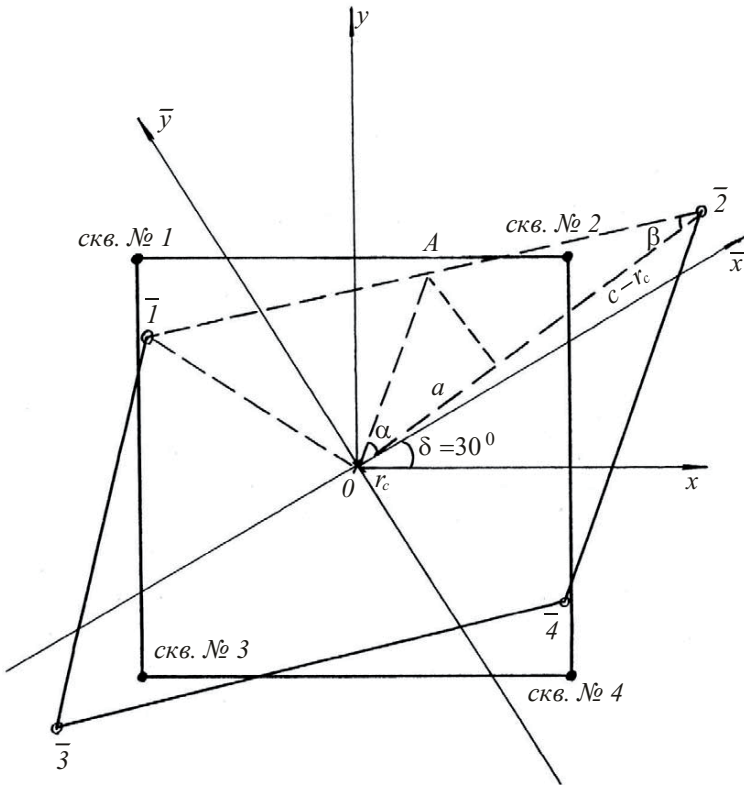


Рис. 6.1. Пятиточечная система расстановки скважин при $\delta = 30^\circ$ до аффинного преобразования (квадрат) и после (параллелограм).

после применения изотропизирующей деформации пространства, уравнение (6.1) можно представить в виде уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0, \quad (6.3)$$

где $\xi = \frac{\sqrt{k_y^0}}{C} \bar{x}$, $\eta = \frac{\sqrt{k_x^0}}{C} \bar{y}$, $C = \sqrt[4]{k_x^0 \cdot k_y^0}$,

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \delta + y \sin \delta \\ \bar{y} = y \cos \delta - x \sin \delta \end{cases} \quad (6.4)$$

Линейные размеры характерных отрезков x_0 , y_0 , взятых соответственно по осям Ox , Oy в плоскости $\xi O \eta$, преобразуются по формулам (рис.6.2):

$$\begin{aligned} \xi_0 &= x_0 C \sqrt{\frac{\cos^2 \delta}{k_x^0} + \frac{\sin^2 \delta}{k_y^0}}, \\ \eta_0 &= y_0 C \sqrt{\frac{\cos^2 \delta}{k_y^0} + \frac{\sin^2 \delta}{k_x^0}}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Угол γ определяется из совместного решения уравнения прямых $A_1 B_1$ и $A_1 D_1$ (рис.6.2):

$$\gamma = \arctg \left(\sqrt{\frac{k_y^0}{k_x^0}} \operatorname{tg} \delta \right) + \arctg \left(\sqrt{\frac{k_y^0}{k_x^0}} \operatorname{ctg} \delta \right). \quad (6.6)$$

Были рассмотрены пятиточечная, семиточечная и девятиточечная системы площадного заводнения соответственно с расстоянием между скважинами 1000 м; 621,25 м; 500 м. Расстояния между скважинами выбирались из

условия равенства площадей элементов соответствующей системы заводнения.

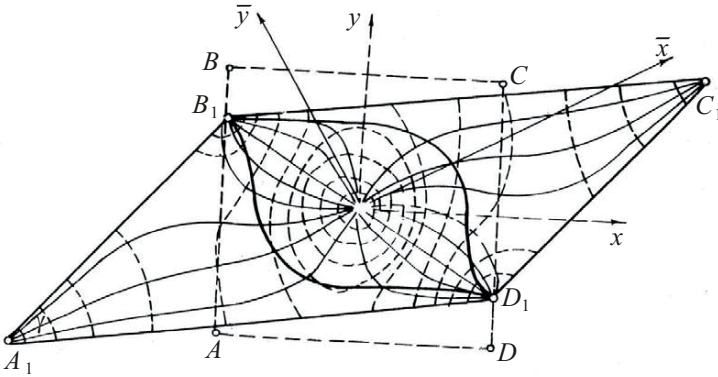


Рис. 6.2. Карта фильтрационного потока для элемента пятиточечной системы расстановки скважин.

соответственно линии равных давлений,
линии тока и положение ВНК.

При различных значениях степени анизотропии $k_{\bar{x}}^0 / k_{\bar{y}}^0$ угла ориентации главных осей тензора анизотропии проницаемости с учетом выражений (6.5) и (6.6) были сконструированы электрические модели преобразованных элементов. Количество электрических моделей соответствовало количеству рассмотренных случаев.

При моделировании приняты следующие исходные данные: шаг модели $M = 100$ м, $\rho_0 = 1$, $\bar{\mu}(P) = 1$, $\bar{\rho}(P) = 1$, радиус скважин $r = 0,1$ м, перепад давления между нагнетательной и эксплуатационной скважинами $\Delta P = 200$ ат,

отношение мощности h пласта и вязкости нефти μ_0 составляет $2 \cdot 10^4$ м/Па-сек. На границе области течения задавались условия непроницаемости.

По правилам электрического моделирования [7, 31] снималось гидродинамическое поле. Строилось положение водонефтяного контакта на определенное время. Далее по формуле (2.3) определялся коэффициент охвата.

Характер распространения фронта закачиваемой воды для всех систем расстановки скважин рассмотрен до момента обводнения первых скважин. Для примера на рис.6.2 показано положение этого фронта для пятиточечной системы расстановки скважин для случая, когда

$$k_x^0 / k_y^0 = g; \quad \delta = 30^\circ$$

На рисунках 6.3 и 6.4 для рассмотренных систем площадных заводнений соответственно показаны зависимости коэффициента охвата от угла ориентации главных осей тензора анизотропии проницаемости.

На рис.6.3 видно, что для пятиточечной системы расстановки скважин с ростом δ от 0° до 45° коэффициент охвата уменьшается для всех значений степени анизотропии. Наибольший коэффициент охвата получается в случае, когда $\delta = 0^\circ$ и 90° , а минимальный - при $\delta = 45^\circ$.

Для девятиточечной системы площадного заводнения наибольший коэффициент охвата получается при $\delta = 30^\circ$ или 60° . Минимальная величина коэффициента охвата достигается при $\delta = 0^\circ$ и 90° .

Семиточечная система характеризуется тем, что максимальная величина коэффициента охвата достигается при $\delta = 0^\circ$ или 60° , а при $\delta = 30^\circ$ коэффициент охвата имеет наименьшее значение.

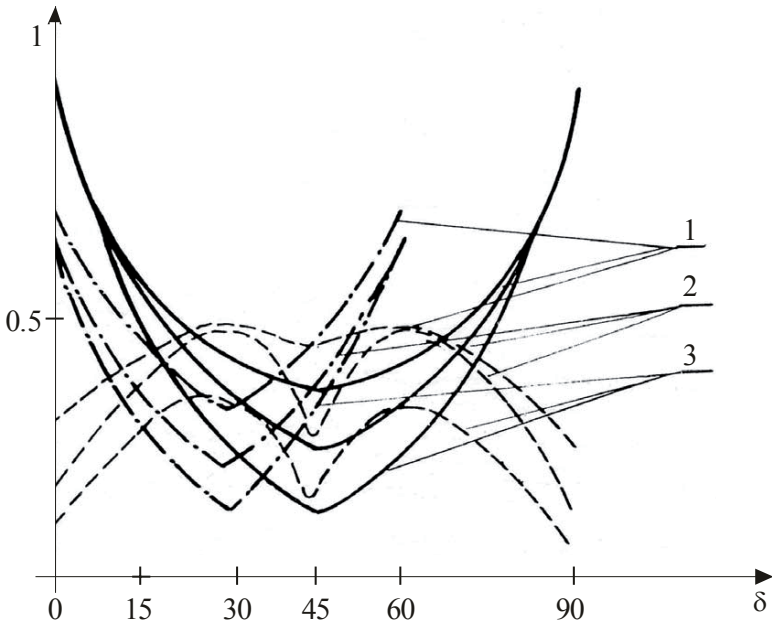


Рис. 6.3. Зависимость коэффициента охвата от угла ориентации при различной степени анизотропии

(1. $\frac{k_x}{k_y} = 4$; 2. $\frac{k_x}{k_y} = 9$; 3. $\frac{k_x}{k_y} = 25$.)

соответственно для пятиточечной, девятиточечной и семиточечной систем расстановки скважин

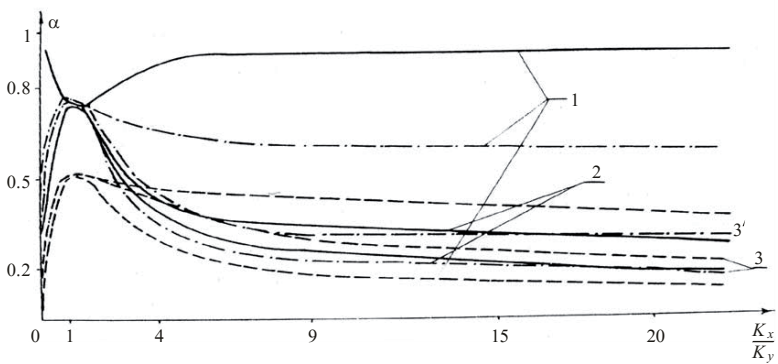


Рис. 6.4. Зависимость коэффициента охвата от степени анизотропии для различных углов ориентации:
1. $\delta = 0^\circ$; 2. $\delta = 30^\circ$; 3. $\delta = 45^\circ$; 3'. $\delta = 15^\circ$.

соответственно для пятиточечной, девятиточечной и семиточечной систем расстановки скважин

Сравнительный анализ показал, что наибольший коэффициент охвата дает пятиточечная система, в случае, когда $\delta = 0^\circ$ или 90° .

Из сравнения результатов, представленных на рис.6.4, можно заключить, что для всех рассмотренных систем заводнения в анизотропной среде коэффициент охвата меньше, чем в изотропной. Только в пятиточечной системе заводнения для $\delta = 0^\circ$ или 90° коэффициент охвата в анизотропной среде может быть больше коэффициента охвата в изотропной среде.

Более резкое изменение коэффициента охвата получается при

$$\frac{k_x^0}{k_y^0} < 1, \quad \text{чем при} \quad \frac{k_x^0}{k_y^0} > 1.$$

Зависимость проницаемости от давления не влияет на форму водонефтяного контакта и коэффициент охвата. Положение контура и коэффициент охвата будут такими же, как и при недеформируемой анизотропной трещиноватой среде, но время продвижения контура нефтеносности будет иным. Отношение времени перемещения ВНК в деформированной трещиноватой анизотропной среде к времени в недеформированной анизотропной трещиноватой среде при любых видах зависимости проницаемости от давления будет определяться по формуле [34]:

$$\frac{t_{\text{г.т.}}}{t_{\text{н.г.т.}}} = \frac{\Delta P_c}{\Delta \Phi_c}, \quad (6.7)$$

где $t_{\text{г.т.}}$, $t_{\text{н.г.т.}}$ - соответственно время продвижения ВНК в деформируемых и не деформируемых трещиноватых средах

$$\Delta \Phi_c = \int_{P_c}^{P_k} \frac{f(P) \bar{\rho}(P)}{\bar{\mu}(P)} dP \quad (6.8)$$

Таким образом, для различных систем площадного заводнения однородно-анизотропного деформируемого трещиноватого пласта с помощью электрической модели изучены некоторые вопросы перемещения ВНК и определены коэффициенты охвата по площади к моменту прорыва воды в эксплуатационные скважины.

Результаты экспериментов показывают, что при разработке деформируемых анизотропных трещиноватых пластов пятиточечная система площадного заводнения приводит к лучшим технологическим показателям, чем семиточечная и девятиточечная.

Предложена простая аналитическая формула, связывающая время продвижения ВНК в однородно-анизотропном трещиноватом деформируемом и недеформируемом пластах при любом виде зависимости проницаемости от пластового давления.

6.2. Влияние степени и угла ориентации анизотропии по проницаемости деформируемой среды на дебит скважин

В этом параграфе приводятся результаты расчетов по определению дебита скважин в деформируемом анизотропном пласте при исходных данных, приведенных в предыдущем параграфе.

На рис.6.5 даны зависимости $\frac{Q_{ан}}{Q_{из}}$ от угла ориентации анизотропии δ при различных значениях $\frac{k_x}{k_y}$ для скважин № 1 и № 2, которые находятся в отличающихся друг от друга условиях относительно значения проницаемости.

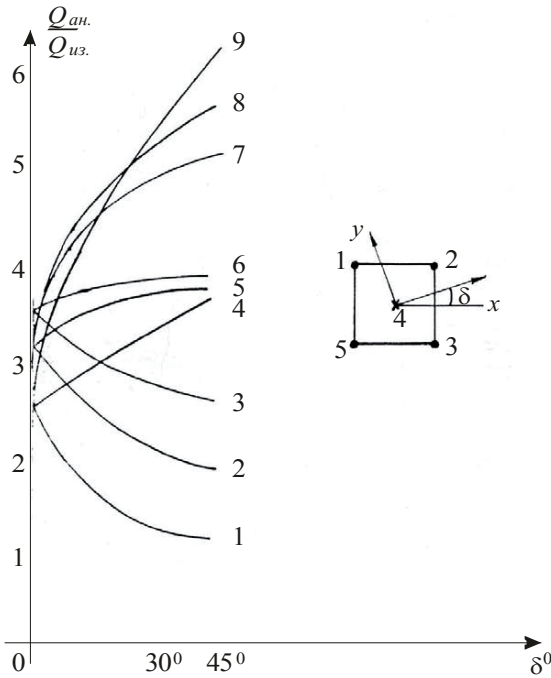


Рис. 6.5. Зависимость отношения $\frac{Q_{ан}}{Q_{из}}$ от угла

ориентации δ° при пятиточечной системе расстановки скважин

Кривые 1,4,9 построены соответственно для скважин

1,4,2 при $\frac{k_x}{k_y} = 25$; кривые 2,5,8 построены соответственно для

скважин 1,4,2 при $\frac{k_x}{k_y} = 9$; кривые 3,6,7 построены

соответственно для скважин 1,4,2 при $\frac{k_x}{k_y} = 4$

Из рисунка видно, что с ростом угла ориентации дебит скважины № 1 уменьшается, суммарный дебит – увеличивается.

На рис.6.6 показана зависимость $\frac{Q_{ан}}{Q_{из}}$ от степени анизотропии $\frac{k_x}{k_y}$ для различных значений угла ориентации.

Как, видно из графиков, с ростом степени анизотропии при всех значениях $\delta > 0$ для скважины № 2 происходит увеличение дебита, в то время как дебит скважины № 1 и суммарный дебит уменьшаются.

При $\delta = 0$ максимальное значение дебита скважины получается при $\frac{k_x}{k_y} = 1$.

Для девятиточечной системы расстановки скважин форма элемента до и после преобразования будет аналогична пятиточечной, только между угловыми эксплуатационными скважинами размещено еще по одной скважине.

Для этого элемента зависимость $\frac{Q_{ан}}{Q_{из}}$ от угла ориентации степени анизотропии показана соответственно на рис.6.7 и 6.8.

Из рисунков можно заключить, что для указанной системы расстановки скважин суммарный дебит не зависит от угла ориентации анизотропии, а с ростом степени анизотропии он постепенно уменьшается.

Элемент семиточечной системы после вышеуказанных преобразований будет иметь вид, показанный на рис.6.9. Для этой расстановки скважин зависимости безразмерных дебитов k_x/k_y от угла ориентации и степени анизотропии показаны на рис.6.10.



Рис. 6.6. Зависимость отношения $\frac{Q_{ан}}{Q_{из}}$ от $\frac{k_x}{k_y}$ при

пятиточечной системе расстановки скважин.

Кривые 3,4,5,12,13,14 построены соответственно для скважин 1,2,4 при $\delta^\circ = 0^\circ$; кривые 1,6,8,10,15,17 построены соответственно для скважин 1,4,2 при $\delta^\circ = 30^\circ$; кривые 2,7,9,11,16,18 построены соответственно для скважин 1,4,2 при $\delta^\circ = 45^\circ$; кривые 1÷9 для анизотропной деформируемой среды; кривые 10÷18 для анизотропной пористой среды

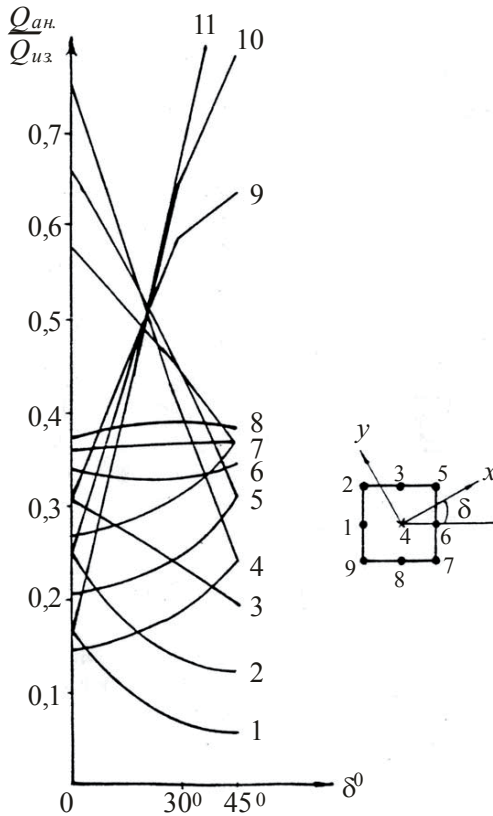


Рис. 6.7. Зависимость отношения $\frac{Q_{ан.}}{Q_{из}}$ от угла

ориентации δ^0 при девятиотценной системе расстановки скважин.

Кривые 1,4,11,12 построены соответственно для скважин 2,1,5,3 при $k_x/k_y = 25$; кривые 2,5,6,10 построены соответственно для скважин 2,1,3,5 при $k_x/k_y = 9$; кривые 3,7,8,9 построены соответственно для скважин 2,1,3,5 при $k_x/k_y = 4$

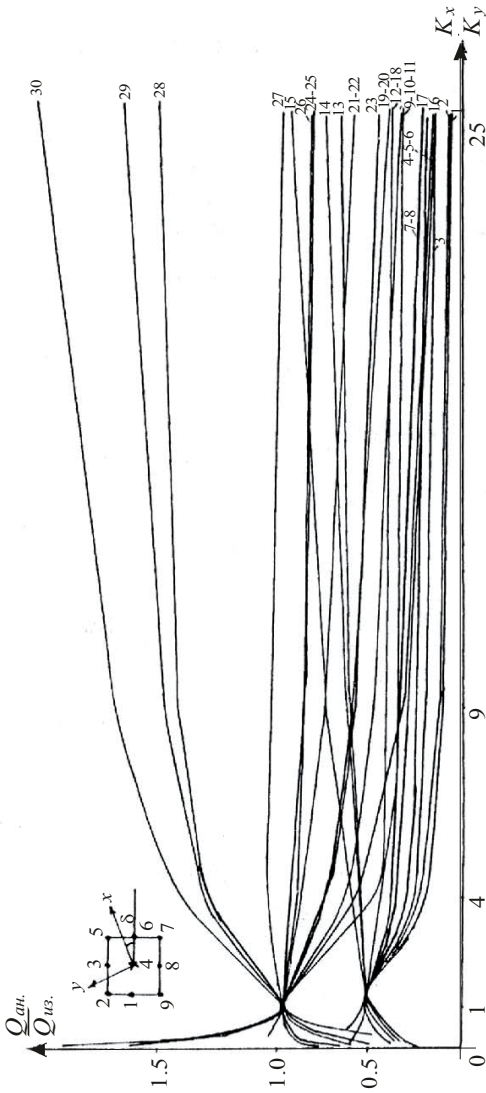


Рис. 6.8. Зависимость $\frac{Q_{ан}}{Q_{из}}$ и $\frac{k_x}{k_y}$ при девятиточечной системе расстановки скважин.

Кривые 3,5,6,9,14,18,19,20,26,29 построены соответственно для скв. 1,2,5,4,3 при $\delta^\circ = 0^\circ$; кривые 1,4,10,12,13,17,23,24,27,28 построены соответственно для скв. 2,1,4,3,5 при $\delta^\circ = 30^\circ$; кривые 2,7,8,11,15,16,21,22,25,30 построены соответственно для скв. 2,1,3,4,5 при $\delta^\circ = 45^\circ$; кривые 1 ÷ 15 для анизотропной деформируемой среды; кривые 16 ÷ 30 для анизотропной пористой среды

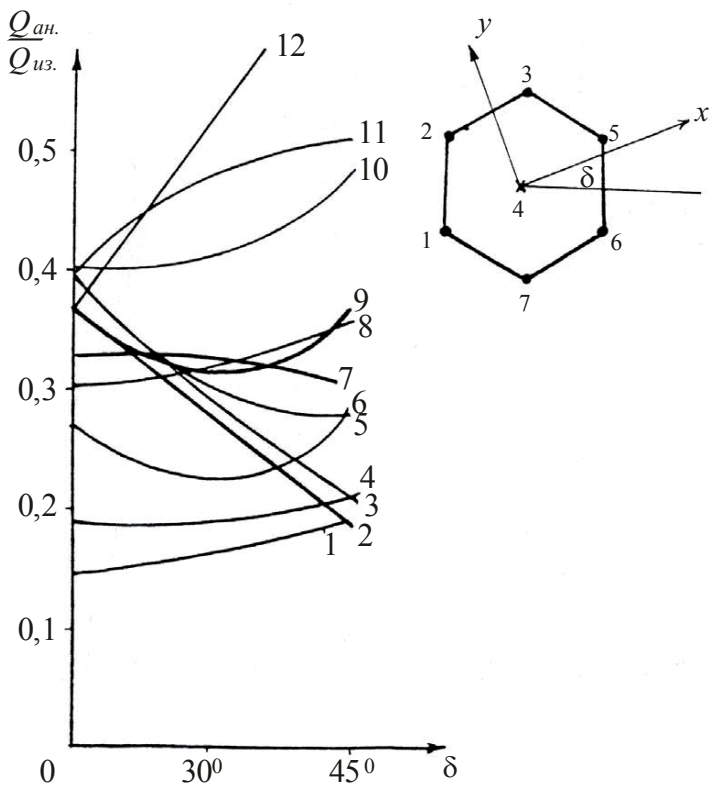


Рис. 6.9. Зависимость отношения $\frac{Q_{ан.}}{Q_{из.}}$ от угла

ориентации δ° при семиточечной системе расстановки скважин.

Кривые 1, 3, 8, 12 построены соответственно для скважин 3, 2, 4, 1 при $k_x / k_y = 25$; кривые 2, 4, 7, 11 построены соответственно для скважин 3, 2, 4, 1 при $k_x / k_y = 9$; кривые 5, 6, 9, 10 построены соответственно для скважин 3, 2, 4, 1 при $k_x / k_y = 4$

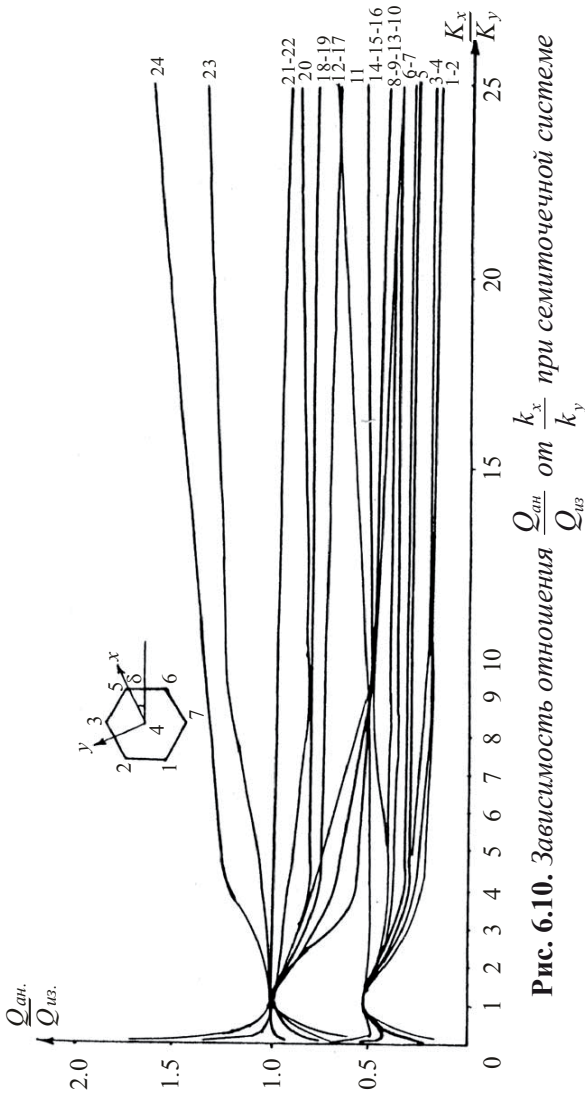


Рис. 6.10. Зависимость отношения $\frac{Q_{ан.}}{Q_{из}}$ от $\frac{K_x}{K_y}$ при семиточечной системе

расстановки скважин.

Кривые 1, 6, 8, 9, 13, 18, 21, 22 построены соответственно для скважин 3, 4, 1, 2 при $\delta^\circ = 0^\circ$; кривые 2, 5, 7, 11, 14, 17, 19, 23 построены соответственно для скважин 3, 2, 4, 1 при $\delta^\circ = 30^\circ$; кривые 3, 4, 9, 15, 16, 12, 20, 24 построены соответственно для скважин 3, 4, 2 при $\delta^\circ = 45^\circ$; кривые 1 ÷ 12 для анизотропной деформируемой среды; кривые 13 ÷ 24 для анизотропной пористой среды

Зависимости даны для скважин №№ 1,2,3 и 4. Характерной особенностью этих зависимостей для семиточечной системы заводнения относительно пяти- и девятиточечной является то, что только при $\delta = 0^\circ$ происходит плавное снижение суммарного дебита с увеличением степени анизотропии.

Для других же углов ориентации с увеличением отношения происходит вначале уменьшение суммарного дебита, а затем его увеличение.

Анализ результатов экспериментов показал:

- с увеличением степени анизотропии суммарный дебит для всех систем заводнения уменьшается,

- с ростом угла ориентации анизотропии суммарный дебит для пятиточечной системы увеличивается, для девятиточечной не изменяется, для семиточечной в зависимости от степени анизотропии может увеличиваться или уменьшаться.

Зависимость проницаемости от давления значительно влияет на производительность скважин. Для всех рассмотренных вариантов отношение дебита скважины в деформируемой среде к дебиту в гранулярной среде определяется по формуле:

$$\frac{Q_{ГР.}}{Q_{пор.}} = \frac{1 - e^{-\alpha \Delta P}}{\alpha \Delta P} \quad (6.9)$$

При наших исходных данных разница в дебитах во всех рассмотренных вариантах составляет 47%.

6.3. Исследования условий ограничения подвижности газонефтяного контакта в деформируемом пласте

При разработке нефтегазовых залежей, сопровождающейся наличием в нефтяной оторочке водонагнетательных и эксплуатационных скважин, для обеспечения недеформируемости газонефтяного контакта (ГНК) целесообразно устанавливать необходимое соотношение между дебитами нагнетательного и эксплуатационного ряда скважин.

Характер деформации ГНК и прорыва газа в эксплуатационный ряд скважин зависит в данном случае от местоположения скважин, фильтрационных свойств флюидов, соотношения между количеством нагнетаемой в пласт воды и добытой нефти и т.д. Важно, что во всех случаях ранний прорыв газа приводит к снижению нефтеотдачи пласта.

В литературе на основании численного моделирования были изучены условия деформации ГНК при пуске в эксплуатацию нефтяных скважин и показаны характерные особенности этого процесса для условий однородного пласта.

Представляет интерес на основе аналитического решения обобщить эти исследования на предмет учёта анизотропии по проницаемости деформируемого пласта [34].

Предполагается, что в деформируемом анизотропном по проницаемости, ограниченном, полосообразном пласте постоянной мощности работают нагнетательный и эксплуатационный ряды скважин (рис 6.8). На контуре ГНК принимается постоянное значение давления.

Проницаемости в направлении оси x и y , а также плотности и вязкости флюидов считаются заданными функциями давления [1, 2, 27 и др.].

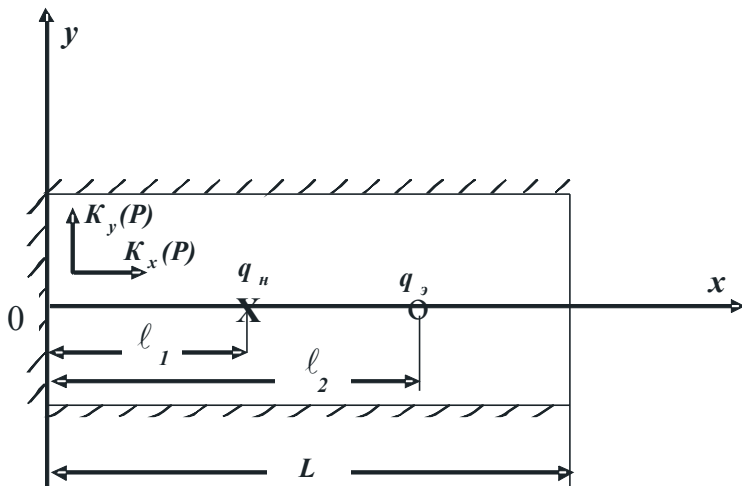


Рис.6.11. *Размещение скважин при разработке нефтегазовых залежей*
x – нагнетательные; o – добывающие

Требуется исследовать характер деформации ГНК, вызванного работой нефтяных скважин.

Математически указанная задача сводится к решению уравнения (6.1), в случае $\delta = 0^\circ$, при следующих граничных условиях:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=\pm\delta} = 0 \quad (6.10)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad P|_{x=L} = P_k \quad (6.11)$$

Считая, что изменения физических параметров жидкости и породы от давления подчиняются экспоненциальному закону

$$f(P) = \exp[\alpha_k(P - P_0)]; \quad \bar{\rho}(P) = \exp[\alpha_\rho(P - P_0)]; \\ \bar{\mu}(P) = \exp[\alpha_\mu(P - P_0)];$$

решение задачи (6.1), (6.10)-(6.11), используя метод разделения переменных, можно представить в виде:

$$P(\xi, \eta) = \frac{1}{\alpha} \ln[1 + \alpha \varphi(\xi, \eta)] \quad (6.12)$$

$$\varphi(\xi, \eta) = -\frac{\mu_0 q_H}{4\pi h \rho_0 \sqrt{K_{ox} K_{oy}}} \left\{ \ln \left[ch \frac{\pi(\xi - \ell_1)}{\bar{\delta}} - \cos \frac{\pi \eta}{\bar{\delta}} \right] - \ln 2 \right\} + \\ + \frac{\mu_0 q_3}{4\pi h \rho_0 \sqrt{K_{ox} K_{oy}}} \left\{ \ln \left[ch \frac{\pi(\xi - \ell_2)}{\bar{\delta}} - \cos \frac{\pi \eta}{\bar{\delta}} \right] - \ln 2 \right\} + Ax + B + (6.13) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \exp\left(\frac{\pi m \xi}{\bar{\delta}}\right) + B_m \exp\left(-\frac{\pi m \xi}{\bar{\delta}}\right) \right] \cos \frac{\pi m \eta}{\bar{\delta}}$$

Здесь $\xi = x$; $\eta = y \cdot K$; $K = \sqrt{\frac{k_x^0}{k_y^0}}$; $\bar{\delta} = \delta \cdot K$, $\alpha = \alpha_k + \alpha_\rho + \alpha_\mu$,

где α_k , α_ρ , α_μ - коэффициенты изменения, соответственно проницаемости, плотности и вязкости от давления, которые определяются опытным путём, А, В, A_m , B_m -известные коэффициенты.

Используя (6.12) и при $\eta=0$, $\eta = \bar{\delta}$ находя соответственно значения скорости по главной и нейтральной линиям тока и приравнявая выражения модулей скоростей

фильтрации, определим значение соотношения дебитов нагнетательных и эксплуатационных рядов скважин, при которых ограничивается деформация ГНК:

$$S = \frac{q_n}{q_o} = \frac{Sh \frac{\pi}{\delta} (L - \ell_1)}{Sh \frac{\pi}{\delta} (L - \ell_2)} \quad (6.14)$$

Средневзвешенное давление на линии эксплуатационного ряда скважин будет определяться по формуле

$$P_{cp} = \frac{2}{\delta} \int_0^{\frac{\delta}{2}} P(\zeta, \eta) d\eta \quad (6.15)$$

Подставляя значения S из (6.14) в (6.15), получим значения средневзвешенного давления на линии эксплуатационного ряда для условий ограниченной деформации ГНК.

По формулам при следующих исходных данных:

$h=10\text{м}$; $\ell_1=100\text{м}$; $\ell_2=500\text{м}$; $\delta=150\text{м}$; $P_o=9806600\text{Па}$;

$r_c=0,1\text{м}$; $q_o=0,868\text{ м}^3/\text{сек}$; $\rho=869\text{кг}/\text{м}^3$;

$K_{oy}=0,505 \cdot 10^{-13}\text{ м}^2$; $\mu=10^{-3}\text{Па}\cdot\text{с}$

проведены расчёты, результаты которых представлены ниже.

На рис. 6.12 показано относительное распределение скоростей фильтрации вдоль линии ГНК при различных значениях коэффициента анизотропии пласта при фиксированном расположении скважин и равенства $q_n=q_o$ ($S=1$).

Кривые 1, 2 и 4 соответствуют анизотропному пласту, а кривая 3 – изотропному.

Как видно из рис. 6.12 по главной линии тока происходит внедрение газа в нефтяную область, а по нейтральной-внедрение нефти в газовую область. При этом скорость фильтрации по главной линии ($y=0$) по абсолютной величине всегда выше, чем по нейтральной. На рисунке видно,

что чем выше значение коэффициента анизотропии «К», тем выше значение скоростей на ГНК.

Из рис. 6.12 далее следует, что чем меньше коэффициент анизотропии, тем меньше деформация ГНК.

Отметим, что при $S > 1$ график распределения скоростей без изменения сместится в сторону газовой области, а при $S < 1$ - в сторону нефтяной области.

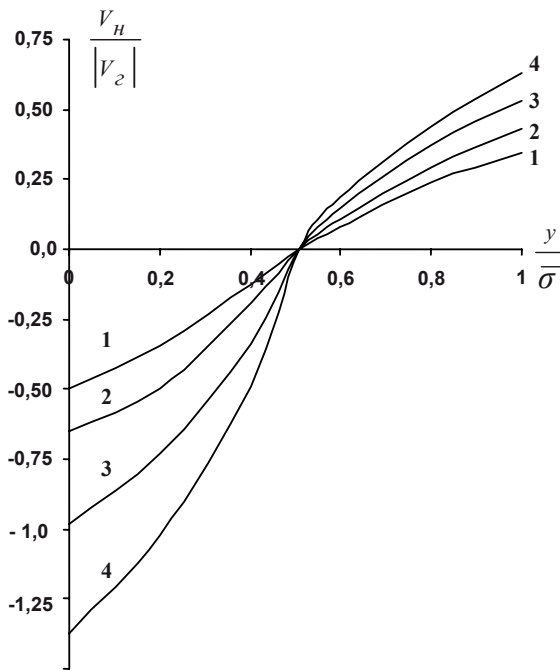


Рис.6.12. Распределение скоростей фильтрации линий ГНК
 1 – $K=0,5$; 2 – $K=0,8$; 3 – $K=1$; 4 – $K=1,2$

На рис. 6.13 показано отношение скоростей на нейтральной и главной линии тока в зависимости от расстояния между эксплуатационным рядом скважин и ГНК при различных степенях анизотропии. Как видно из рисунка, с увеличением расстояния ГНК от эксплуатационной батареи деформация уменьшается. Из рис. 6.13, кроме того, видно, как и ранее, что чем больше коэффициент анизотропии, тем деформация выше, но с увеличением расстояния между ГНК и эксплуатационным рядом она уменьшается.

Из приведённого выше мы определили степень и характер мгновенной деформации ГНК в зависимости от анизотропии и расстояния между эксплуатационным рядом и ГНК. Эти результаты были получены при $q_n = q_0$. Из общих рассуждений ясно, что изменением соотношения q_n и q_0 также можно воздействовать на деформацию ГНК.

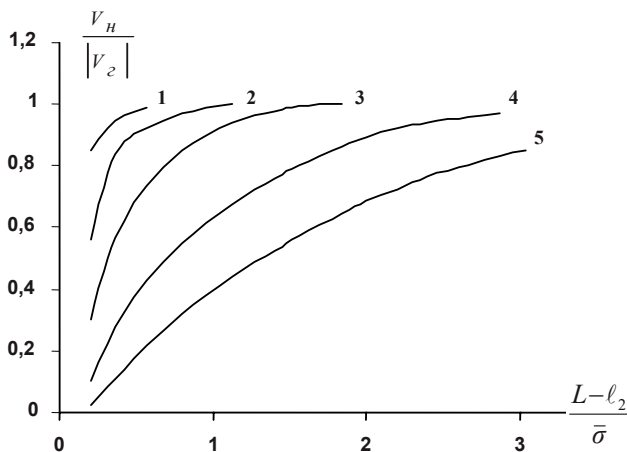


Рис.6.13. Зависимость деформации ГНК от расстояния между эксплуатационным рядом скважин и ГНК
 1 – $K=0,25$; 2 – $K=0,5$; 3 – $K=1$; 4 – $K=2$; 5 – $K=4$

На рис. 6.14 показано изменение $S = \frac{q_H}{q_3}$, которое обеспечивает недеформируемость контакта при различном расстоянии между ГНК и эксплуатационным рядом скважин и при различных степенях анизотропии.

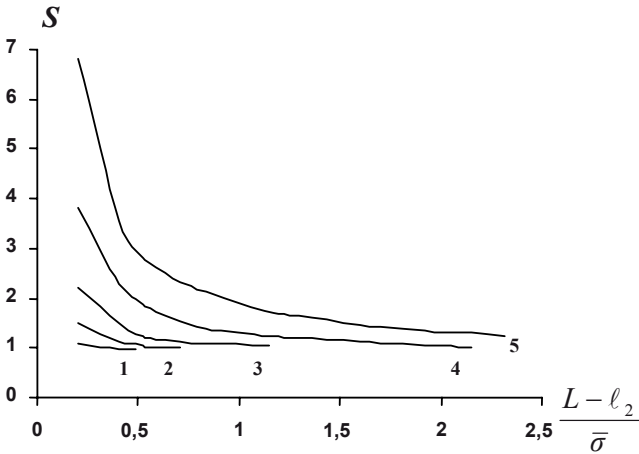


Рис.6.14. Зависимость параметра от расстояния между эксплуатационным рядом скважин и ГНК
 1 – $K=0,25$; 2 – $K=0,5$; 3 – $K=1$; 4 – $K=2$; 5 – $K=4$

Из рис. 6.14 видно, что чем больше анизотропия, тем выше разница в величинах S , но с увеличением расстояния между ГНК и эксплуатационным рядом скважин, разница в величинах S уменьшается и на определённом расстоянии их значения становятся очень близкими. Отметим, что во всех вариантах с изменением расстояния между ГНК и эксплуатационным рядом скважин, S , как и должно быть, стремится к 1.

Вычислим на основании формулы (6.15) значения средневзвешенного давления на линии эксплуатационного ряда скважин при различных α при $S>1$, $S=1$, $S<1$ и при $\alpha=0$ для $S=1$.

В таблице 6.1 даны их значения, откуда видно, что их изменение влияет на средневзвешенное давление, однако в пределах рассмотренных условий это влияние невелико.

Таблица 6.1

Значения средневзвешенного давления
на линии эксплуатационного ряда скважин

	$\alpha \cdot 10^8$ (1/Па)	\bar{P}_z (Па)
2	5	9866625
	10	9865021
	15	9863354
1	5	9678571
	10	9676967
	15	9675300
0,5	5	9490517
	10	9488913
	15	9487246
1	0	9679401

Глава VII.
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗРАБОТКИ МНОГОПЛАСТОВЫХ
НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ,
РАЗРАБАТЫВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ СКВАЖИН

Обычно нефтяные, газовые и газоконденсатные месторождения состоят из нескольких продуктивных пластов с разными физико-геологическими характеристиками, которые в свою очередь разделяются между собой непроницаемыми или мало проницаемыми перемычками. Разработка нескольких продуктивных пластов одним общим фильтром приводит как при непроницаемой, так и при малопроницаемой перемычках к быстрому истощению более проницаемых пластов и медленному – в менее проницаемых пластах.

Поэтому при проектировании и анализе разработки многопластовых нефтяных месторождений необходимо решать задачи о взаимодействии пластов, разделенных малопроницаемой перемычкой. Количество перетекающей жидкости или в зависимости от параметров пласта и перемычки может оказать существенное влияние на показатели разработки.

Имеется ряд точных и приближенных решений задач по схемам Мятлева-Гиринского и Хантуша стационарного и нестационарного течения жидкости в пласте с учетом утечки через малопроницаемые перемычки [4, 32, 34 и др.].

В тех случаях, когда количество продуктивных пропластков больше двух, получение решений с учетом взаимодействия скважин в пределах упомянутых схем наталкивается на принципиальные трудности.

Решения некоторых задач, полученные в данной главе, должны быть рассмотрены как точные решения выше указанных задач для любого числа пропластков и зон с разными проницаемостями.

7.1 Взаимодействие скважин в неоднородных полосообразных пластах со слабопроницаемой кровлей

В настоящем параграфе решается задача притока жидкости к прямолинейной батарее равнодебитных скважин в ограниченном неоднородном пласте при наличии слабопроницаемой перемычки. Предполагается, что на основании исследований скважин и пластов устанавливается закономерность изменения проницаемости по площади. При замене этой закономерности ступенчатой линией, задача притока жидкости к скважинам в неоднородном пласте, даже при наличии утечки ее в другие горизонты, приводится к задаче в пласте, состоящем из нескольких зон с разными проницаемостями. Батарея эксплуатационных скважин расположена вдоль оси x , над перемычкой поддерживается постоянное давление P_0 , а подошва пласта является непроницаемой (рис.7.1).

Требуется найти решение системы уравнений [34]:

$$\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_j}{\partial y^2} - \alpha_j^2 P_j = 0, \quad j = \overline{1,3}, \quad (7.1)$$

удовлетворяющее условиям:

$$\left. \frac{\partial^2 P_j}{\partial x} \right|_{x=0, \sigma/2} = 0, \quad (7.2)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1(x, y) \Big|_{y=h_1} &= P_2(x, y) \Big|_{y=h_1} \\ K_1 \partial P_1 / \partial y \Big|_{y=h_1} &= K_2 \partial P_2 / \partial y \Big|_{y=h_1} \end{aligned} \right\}, \quad (7.3)$$

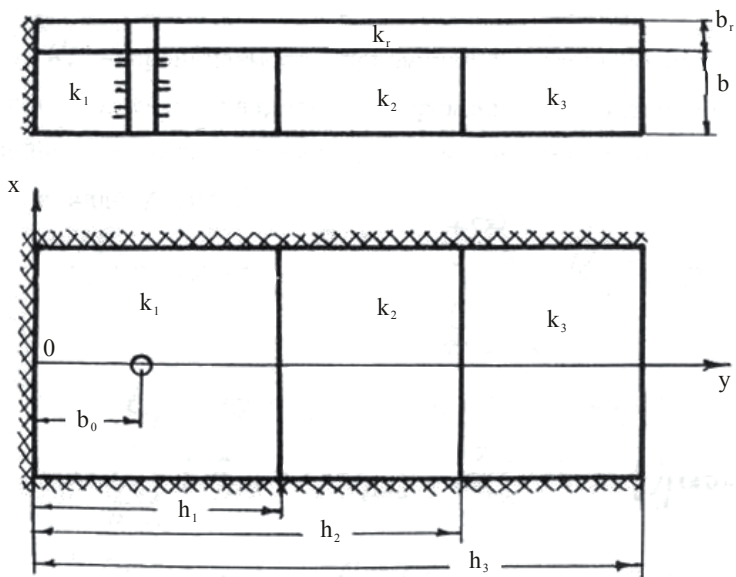


Рис. 7.1. Расчетная схема потока жидкости к батарее скважин в неоднородном пласте со слабопроницаемой кровлей

$$\left. \begin{aligned} P_2(x, y)|_{y=h_2} &= P_3(x, y)|_{y=h_2} \\ K_2 \frac{\partial P_2}{\partial y}|_{y=h_2} &= K_3 \frac{\partial P_3}{\partial y}|_{y=h_2} \end{aligned} \right\}, \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad P_3(x, y)|_{y=h_3} = P_k - P_o, \quad (7.5)$$

где

$$P_j(x, y) = P_j(x, y) - P_o, \quad \alpha_j^2 = \kappa\zeta/\kappa_j \nu \nu_2,$$

K_r, K_j – проницаемости перемычки и отдельных пластов.

Применяя метод разделения переменных с учетом наличия прямолинейной батареи скважин, решение системы уравнений (7.1) находим в виде [34]:

$$P_1(x, y) = -\frac{Q\mu}{2\pi \nu \kappa_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_o(\alpha_1 r_n) + C_1 \exp \alpha_1 y + D_1 \exp(-\alpha_1 y) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [A_{1m} \exp \mu_{1m} y + B_{1m} \exp(-\mu_{1m} y)] \cos \lambda_m x, \quad (7.6)$$

$$P_{j+1}(x, y) = C_{j+1} \exp \alpha_{j+1} y + D_{j+1} \exp(-\alpha_{j+1} y) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [A_{(j+1)m} \exp \mu_{(j+1)m} y + B_{(j+1)m} \exp(-\mu_{(j+1)m} y)] \cos \lambda_m x, \quad (7.7)$$

где

$$r_n = [(x - \sigma n)^2 + (y - \sigma_o)^2]^{1/2}, \quad \lambda_m = \frac{2\pi m}{\sigma},$$

$$\mu_{jm} = (\alpha_j^2 + \lambda_m^2)^{1/2},$$

C_j, D_j, A_{jm}, B_{jm} – неопределенные коэффициенты.

Суммируя выражение $\sum_{n=-8}^{+\infty} K_o(\alpha_1 r_n)$ по формуле Пуассона [63] при условии $y > \epsilon_o$ и $y < \epsilon_o$, с учетом граничных условий (7.2)-(7.5) из (7.4) при значениях $m=n$ для распределения давления в первой зоне имеем:

$$\begin{aligned} \bar{P}_1(x, y) = & \bar{P}_o + \frac{2}{\alpha_1 \sigma \bar{K}_1} \left\{ [M(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o) - \right. \\ & - \sigma \alpha_1 \bar{K}_1 (\bar{P}_\kappa - \bar{P}_o) N(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o)] ch \alpha_1 y + \\ & + sh \alpha_1 (y - \epsilon_o) + 2 \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} [M_n(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o) \times \\ & \left. \times ch \mu_{1n} y + \frac{sh \mu_{1n} (y - \epsilon_o)}{\mu_{1n}}] \cos \lambda_n x \right\}, \quad (7.8) \end{aligned}$$

Если для всех значений n $(2\pi n)^2 \gg (\alpha_1 \sigma)^2$, то с достаточной точностью для давления получается приближенная формула:

$$\begin{aligned} \bar{P}_1(x, y) = & \bar{P}_o + \frac{2}{\alpha_1 \sigma \bar{K}_1} \left\{ [M(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o) - \right. \\ & - \sigma \bar{K}_1 \alpha_1 (\bar{P}_\kappa - \bar{P}_o) N(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o)] ch \alpha_1 y + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + sh\alpha_1(y - \epsilon_o) + \frac{\alpha_1\sigma}{2\pi} \ln \left[1 - 2 \exp \frac{2\pi(\epsilon_o - y)}{\sigma} \times \right. \\
 & \times \cos \frac{2\pi x}{\sigma} + \exp \frac{4\pi(\epsilon_o - y)}{\sigma} \left. \right] + \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} [2M_n(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o) \\
 & ch\mu_{1n}y + \frac{1}{\mu_{1n}} \exp \mu_{1n}(y - \epsilon_o)] \cos \lambda_n x \}, \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

где

$$\bar{P} = \frac{2K_o\sigma P}{\mu Q},$$

$$\begin{aligned}
 M(K_j, \alpha_j, h_j, \epsilon_o) = & - \left[\delta_1 \xi_3 \frac{e^{-h_1\alpha_2} - \delta_2/\delta_1 e^{\alpha_2(h_1-2h_2)}}{ch\alpha_1 h_1 (\delta_1 \xi_2 - \xi_1 \delta_2 e^{-2h_2\alpha_2})} + \right. \\
 & \left. + \frac{sh\alpha_1(h_1 - \epsilon_o)}{ch\alpha_1 h_1} \right],
 \end{aligned}$$

$$N(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o) = -2 \frac{sh\alpha_1(h_1 - \epsilon_o) e^{-\alpha_2 h_2}}{ch\alpha_1 h_1} \times \quad (7.10)$$

$$\frac{(\xi_1 e^{-\alpha_2 h_1} - \xi_2 e^{\alpha_2 h_1}) e^{-\alpha_3(h_2-h_3)}}{\xi_2 \delta_1 - \xi_1 \delta_2 e^{-2\alpha_2 h_2}},$$

$$M_n(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o) = - \left[\frac{sh\mu_{1n}(h_1 - \epsilon_o)}{ch\mu_{1n} h_1} + \right.$$

$$+ \xi_{3n} \delta_{1n} \frac{e^{-\mu_{2n} h_1} - \delta_{2n} / \delta_{1n} e^{\mu_{2n} (h_1 - 2h_2)}}{ch \mu_{1n} h_1 (\delta_{1n} \xi_{2n} - \xi_{1n} \delta_{2n} e^{-2\mu_{2n} h_{1n}})} \Bigg],$$

$\bar{K}_1 = \frac{K_1}{K_o}$, K_o - коэффициент проницаемости для соблюдения размерности. При $x=0$, $y=v_o + R_c$ забойное давление у скважины определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{1c} = \bar{P}_o + \frac{1}{\alpha_1 \sigma \bar{K}_1} \{ & [M - \sigma \bar{K}_1 \alpha_1 (\bar{P}_k - \bar{P}_o) N] ch \alpha_1 (v_o + R_c) + \\ & sh \alpha_1 R_c + \frac{\alpha_1 \sigma}{2\pi} \ln [1 - \exp(-2\pi R_c / \sigma)] + \\ & + \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} [2M_n ch \mu_{1n} (v_o + R_c) + \frac{1}{\mu_{1n}} \exp \mu_{1n} R_c] \}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

или, считая $\alpha_1 R_c \ll 1$, $\frac{2\pi R_c}{\sigma} \ll 1$, для \bar{P}_{1c} находим:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{1c} = \bar{P}_o + \frac{2}{\alpha_1 \sigma \bar{K}_1} \{ & [M - \sigma \bar{K}_1 \alpha_1 (\bar{P}_k - \bar{P}_o) N] \times \\ & \times ch \alpha_1 (v_o + R_c) - \frac{\sigma \alpha_1}{2\pi} \ln \sigma / 2\pi R_c + \\ & + \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[2M_n ch \mu_{1n} (v_o + R_c) + \frac{1}{\mu_{1n}} \exp \mu_{1n} R_c \right] \} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Несмотря на то, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\mu_{1n} \exp \mu_{1n} R_c$ в (7.11) и (7.12) расходятся, но в совокупности с другими членами они сходятся.

Из (7.12) можно получить формулу забойного давления для однородного пласта. Указанным путем можно учитывать и влияние неоднородности по проницаемости перемычки. Предполагая, что контур нефтеносности находится на расстоянии y_o в первой зоне, момент прорыва воды в скважину для условий осредненного значения давления определяется по формуле:

$$\tau = - \int_{\eta_o}^{\eta} \frac{d\eta}{F \cdot sh \alpha_1 \sigma \eta + ch \alpha_1 \sigma (\eta - \bar{\epsilon}_o) + E} \rightarrow \quad (7.13)$$

$$\rightarrow \frac{\exp(\bar{\epsilon}_o - \eta)}{sh \pi (\eta - \bar{\epsilon}_o)},$$

где

$$\tau = \frac{Qt}{m \nu \sigma^2}, \quad \eta = y / \sigma, \quad \bar{\epsilon}_o = \epsilon_o / \sigma, \quad \eta_o = y_o / \sigma,$$

$$F(\alpha_j, \bar{K}_j, h_j, \bar{\epsilon}_o) = M(\alpha_j, \bar{K}_j, h_j, \bar{\epsilon}_o) - \sigma \bar{K}_1 \alpha_1 (\bar{P}_k - \bar{P}_o) \times$$

$$\times N(\alpha_j, \bar{K}_j, h_j, \bar{\epsilon}_o),$$

$$E(\alpha_j, \bar{K}_j, h_j, \bar{\epsilon}_o) = \sum_{n=1}^{\infty} [2\mu_{1n} M_n sh \mu_{1n} \sigma \eta + \exp(\sigma \mu_{1n} (\eta - \bar{\epsilon}_o))]$$

По формуле (7.11)-(7.13) проведены расчеты при следующих данных:

$$Q=10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{сек}}, \quad b = b_2 = 10\text{м}, \quad b_o = 200\text{м}, \quad h_1 = 500\text{м},$$

$$h_2 = 2h_1, \quad h_3 = 3h_1, \quad \sigma = 600 \text{ м}, \quad R_c = 0,1\text{м},$$

$$y_o = 500\text{м}, \quad P_o = P_k = 10^7 \text{Па}, \quad \mu = 0,001 \text{Па.сек.}$$

для различных значений K_j .

Из таблицы 7.1 видно, что при любых фиксированных значениях K_j проницаемость перемычки K_r незначительно влияет на значение безразмерного забойного давления $\overline{p_c}$. Значение безразмерного давления $\overline{p_c}$ с ухудшением проницаемости перемычки уменьшается при всех значениях $\overline{K_j}$. Улучшение же проницаемости первой зоны K_1 , где размещены скважины, способствует увеличению безразмерного забойного давления $\overline{p_c}$. При всех K_r значения этих давлений в процентном отношении относительно $\overline{K_1} = 0,2$ изменяются в пределах 2 – 4%. С увеличением проницаемости III зоны при фиксированном K_r , $\overline{p_c}$ почти не изменяется до значения $K_r = 10^{-5}$, а начиная со значения $K_r = 10^{-6}$, $\overline{p_c}$ с увеличением $\overline{K_3}$ увеличивается. Значение $\overline{p_c}$, подсчитанные для средних значений проницаемости $K_{срj}$ и для неоднородного пласта, когда изменяется проницаемость первой зоны, близки друг к другу.

Таблица 7.1

Результаты расчета безразмерного забойного давления

\bar{K}_j				$K_z 10^{12} \text{ м}^2$					
\bar{K}_1	\bar{K}_2	\bar{K}_3	\bar{K}_{cp}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
$\sigma = 600 \text{ м}$									
0,2	0,5	1	-	189,0	188,9	184,4	180,2	179,2	179,0
-	-	-	0,566	195,9	195,3	192,7	189,4	188,5	188,5
0,5	0,5	1	-	195,4	194,7	192,3	189,9	189,7	189,7
0,5	1	0,5	-	195,4	194,7	192,4	188,6	184,4	184,3
-	-	-	0,666	196,4	195,9	193,6	190,9	190,2	190,1
1	0,5	1	-	197,6	197,1	195,1	193,6	193,5	193,5
0,5	1	1	-	195,4	194,7	192,5	188,4	186,3	186,2
-	-	-	0,833	197,2	196,6	194,6	192,8	192,6	192,6
2	0,5	1	-	198,8	198,3	196,5	195,8	195,6	195,6
0,5	1	2	-	195,4	194,7	192,7	189,2	187,7	187,4
-	-	-	1,166	198,0	197,5	196,6	196,0	195,8	195,8
5	0,5	1	-	199,5	199,0	197,6	197,4	197,3	197,3
-	-	-	2,166	198,9	198,5	197,5	197,1	197,0	197,0
$\sigma = 300 \text{ м}$									
0,2	0,5	1	-	191,1	191,0	182,0	173,5	171,7	171,2
-	-	-	0,566	196,4	195,2	190,1	183,5	181,7	181,6
0,5	0,5	1	-	196,0	194,7	189,8	185,1	184,6	184,6
-	-	-	0,666	196,9	195,8	191,2	185,8	184,5	184,2
1	0,5	1	-	197,9	196,8	192,8	189,7	189,7	190,0
-	-	-	0,833	197,5	196,4	192,4	188,4	187,6	187,5
2	0,5	1	-	198,9	198,0	194,4	192,9	192,9	193,1
-	-	-	1,166	198,2	197,2	195,4	194,2	193,9	193,9
5	0,5	1	-	199,5	198,6	195,6	194,9	195,5	195,8
-	-	-	2,166	198,9	198,2	196,3	195,3	195,2	195,2

Проведенные исследования при $P_0 = 9 \cdot 10^6$ Па показали, что значения забойных давлений во всех рассмотренных

вариантах оказываются ниже (порядка 10%), чем в случае $P_0 = 10^7$ Па.

Расстояние между скважинами, независимо от значений K_r и \bar{K}_1 , несущественно влияет на \bar{P}_c . При всех значениях изменения проницаемости первой зоны с уменьшением K_r при $\sigma = 300$ м уменьшение значения \bar{P}_c более заметно, чем в случае $\sigma = 600$ м. Эти изменения при малых значениях \bar{K}_1 оказываются порядка 10–12%, а при больших – порядка 2–3%.

Из таблицы 7.2 видно, что с уменьшением значения K_r безразмерное время движения частицы жидкости τ_r существенно уменьшается. При $\bar{K}_1 = 5$, по сравнению со случаем $\bar{K}_1 = 0,2$ безразмерное время движения частицы жидкости уменьшается. Причем это уменьшение наиболее заметно при больших значениях K_r . С уменьшением значения K_r указанная разница почти исчезает.

Проведенные расчеты показывают, что при всех диапазонах изменения \bar{K}_j, K_2 , входящими в формулы суммами по сравнению с другими членами можно пренебречь. Эта же задача легко обобщается для случая, когда в пласте, состоящем из нескольких зон с разными проницаемостями, работают прямолинейные батареи скважин.

Таблица 7.2

Результаты расчета безразмерного времени

\bar{K}_j			$K_2 10^{12} \text{ м}^2$						
\bar{K}_1	\bar{K}_2	\bar{K}_3	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	
0,2	0,5	1	10,13	3,81	1,34	0,85	0,78	0,78	
5	0,5	1	3,89	1,68	0,99	0,80	0,78	0,77	

7.2 Неустановившееся течение жидкости к системе скважин в залежах со слабопроницаемой перемычкой

При проектировании систем разработки нефтяных месторождений, эксплуатируемых в условиях упругого режима, используются решения различных задач нестационарной фильтрации жидкости в пористых пластах. Обычно при решении таких типов задач применяется операционный метод. Из-за сложности граничных условий и многомерности задачи при помощи этого метода во многих случаях не удается получить точное решение. В связи с этим в данном параграфе рассмотрены и решены некоторые задачи нестационарной фильтрации жидкости в ограниченных пластах с помощью методов функции Грина и интегральных преобразований с конечными пределами, а затем их решения упрощены с помощью предположенного здесь же метода.

Рассмотрим следующие случаи.

7.2.1. Полосообразная залежь

Предположим, что полосообразная нефтяная залежь ограничена по простиранию и эксплуатируется системой скважин с разными дебитами. Разрабатываемая и вышележащая залежь, в которой давление считаем постоянным, разделяются малопроницаемой перемычкой (рис.7.2). Залежь и жидкость считаем однородными по проницаемости и вязкости; подошву пласта – непроницаемой. Режим пласта замкнуто – упругий, фильтрация жидкости подчиняется закону Дарси. Требуется определить поле давления в продуктивном пласте и количество перетекающей через перемычку жидкости.

Функция давления будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению [34]:

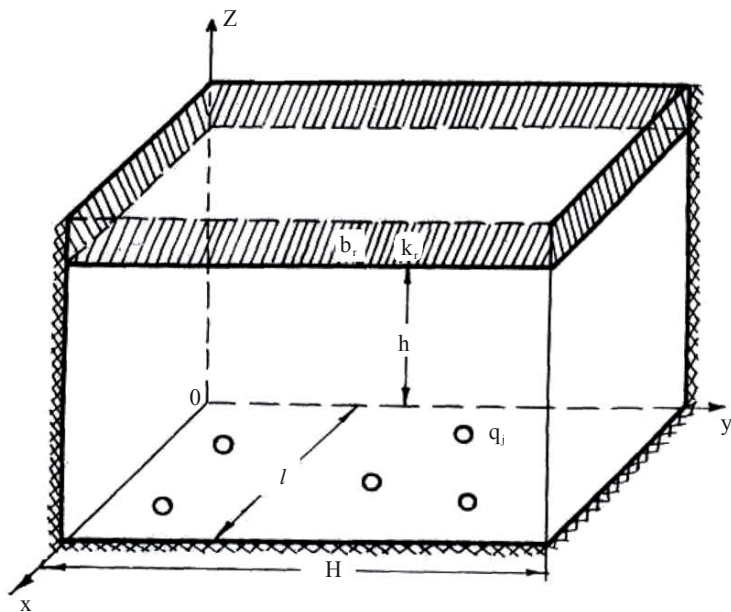


Рис. 7.2. Схема залежи со слабопроницаемой перемычкой

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} - \varepsilon^2 P = \frac{\partial P}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^N Q_j \delta(\xi - \xi_j) \delta(\eta - \eta_j). \quad (7.14)$$

где $\xi = \frac{x}{H}, \quad \eta = \frac{y}{H}, \quad \tau = \chi t / H^2,$

$$\varepsilon^2 = \alpha^2 H^2, \quad Q_j = q_j / q_o, \quad [q_o] = \frac{M^3}{c},$$

$$\mathfrak{R} = \frac{\kappa \delta}{\mu q_o} (P_o - P)$$

Граничные и начальные условия задачи имеют вид:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad (7.15)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0,$$

$$P(\xi, \eta, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0,$$

где $\xi_0 = l/H$

Предполагая, что функция $P(\xi, \eta, \tau)$ разлагается в ряд Фурье, применяя к уравнению (7.14) и условиям (7.15) конечное интегральное косинус преобразование Фурье по переменным ξ, η , решение задачи получаем в виде:

$$P(\xi, \eta, \tau) = -\frac{2}{\xi_o} \left\{ \frac{P_{joo}}{2\varepsilon^2} (1 - e^{-\varepsilon^2 \tau}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{jmo} [1 - e^{-(\varepsilon^2 + \mu_m^2)\tau}]}{\varepsilon^2 + \mu_m^2} \cos \mu_m \eta + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2B_{jnm} [1 - e^{-(v_n^2 + \mu_m^2)\tau}]}{v_n^2 + \mu_m^2} \cos \lambda_n \xi \cdot \cos \mu_m \eta \}, \quad (7.16)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \lambda_n &= \pi n / \xi_o, \quad \mu_m = \pi m, \quad v_n^2 = \varepsilon^2 + \lambda_n^2, \\
 B_{jnm} &= \sum_{j=1}^N Q_j \cos \lambda_n \xi_j \cdot \cos \mu_m \eta_j, \\
 B_{jom} &= \sum_{j=1}^N Q_j \cos \mu_m \eta_j, \\
 B_{jno} &= \sum_{j=1}^N Q_j \cos \lambda_n \xi_j,
 \end{aligned}$$

Отметим, что формула (7.16) для практического использования неудобна. Это объясняется тем, что ряды, не зависящие от времени и входящие в это решение, сходятся очень медленно.

Для упрощения формулы (7.16) воспользуемся косвенным методом суммирования упомянутых медленно сходящихся рядов. С этой целью подберем такую вспомогательную стационарную задачу, решение которой будет соответствовать не зависящим от времени членам, входящим в формулу (7.16).

Функция $P(\xi, \eta)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} - \xi^2 P = \sum_{j=1}^N Q_j \delta(\xi - \xi_j) \delta(\eta - \eta_j), \quad (7.17)$$

и граничным условиям (7.15).

Применяя метод функции Грина к задаче (7.17), (7.15), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 P(\xi, \eta) = & -\frac{1}{\xi_0} \sum_{j=1}^N Q_j \left\{ \frac{1}{v_o sh v_o} \left[ch v_o (1 - \eta_j) ch v_o \eta \right. \right. \\
 & \left. \left. + ch v_o \eta_j \cdot ch v_o (1 - \eta) \right] \right. \\
 & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n \xi_j \cdot \cos \lambda_n \xi}{v_n sh v_n} \left[ch v_n (1 - \eta_j) ch v_n \eta, \eta < \eta_j \right] \right. \\
 & \left. \left[ch v_n \eta_j ch v_n (1 - \eta), \eta > \eta_j \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Формула (7.18) и члены, не зависящие от времени, входящие в (7.16), являются решением одной и той же стационарной задачи. Тогда с учетом (7.16) и (7.18) получим формулу для определения поля давлений в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 P(\xi, \eta, \tau) = & -\frac{\sum_{j=1}^N Q_j}{\xi_0} \left\{ \frac{1}{v_o sh v_o} \left[ch v_o (1 - \eta_j) ch v_o \eta, \eta < \eta_j \right. \right. \\
 & \left. \left. + ch v_o \eta_j ch v_o (1 - \eta), \eta > \eta_j \right] \right. \\
 & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch \lambda_n \xi_j \cos \lambda_n \xi}{v_n sh v_n} \left[ch v_n (1 - \eta_j) ch v_n \eta, \eta < \eta_j \right. \\
 & \left. \left[ch v_n \eta_j ch v_n (1 - \eta), \eta > \eta_j \right] - \right. \\
 & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n \xi_j \cos \lambda_n \xi}{\varepsilon^2 + \lambda_n^2} \exp[-(\varepsilon^2 + \lambda_n^2) \tau] - \\
 & \left. - \frac{1}{\varepsilon^2} \exp(-\varepsilon^2 \tau) - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_m \eta_j \cos \mu_m \eta}{\varepsilon^2 + \mu_m^2} \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp[-(\varepsilon^2 + \mu_m^2)\tau] - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n \xi_j}{v_n^2 + \mu_m^2} \times \\ & \times \cos \mu_m \eta_j \cos \lambda_n \xi \cos \mu_m \eta \exp[-(v_n^2 + \mu_m^2)\tau] \quad (7.19) \end{aligned}$$

В частности, если пласт разрабатывается прямой цепочкой скважин с равными дебитами, расположенной параллельно оси ox в точках $y_j = \bar{\sigma}_o$, $x_j = \frac{l}{N}(j-0.5)$, то приняв $\eta = \bar{\sigma}_o + \bar{R}_c$, $\xi = \xi_1 = l/2NH$, из (7.19) определим выражение фильтрационного сопротивления потока в скважине:

$$\begin{aligned} \Delta P_c &= \frac{\kappa \bar{\sigma}}{\mu q} (P_o - P_c) = -\frac{N}{\xi_o} \left[\frac{ch \varepsilon \bar{\sigma}_o ch(1 - \bar{\sigma}_o)}{\varepsilon sh \varepsilon} - \right. \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \exp(-\varepsilon^2 \tau) + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{nj} ch v_n (1 - \bar{\sigma}_o) ch v_n \bar{\sigma}_o - \\ & - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N f_{nj} \exp[-(\varepsilon^2 + \lambda_n^2)\tau] - \\ & - \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N F_{mj} \exp[-(v_m^2 + \varepsilon^2)\tau] - \\ & \left. - \frac{4}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N \psi_{nmj} \exp[-(v_n^2 + \mu_m^2)\tau] \right], \quad (7.20) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_{nj} = \sum_{j=1}^N \frac{\cos \lambda_n \xi_j \cdot \cos \lambda_n \xi_1}{v_n sh v_n},$$

$$f_{nj} = \frac{\cos \lambda_n \xi_j \cdot \cos \lambda_n \xi_1}{\varepsilon^2 + \lambda_n^2},$$

$$F_{mj} = \frac{\cos^2 \mu_m \bar{\theta}_o}{\varepsilon^2 + \mu_m^2},$$

$$\Psi_{mj} = \frac{\cos \lambda_n \xi_1 \cdot \cos \lambda_n \xi_j \cos^2 \mu_m \bar{\theta}_o}{v_n^2 + \mu_m^2}.$$

Как показали проверочные расчеты, ряды, входящие в формулу (7.20), содержащие экспоненты, быстро сходятся даже при малых значениях τ . Доказано, что последним двойным рядом можно пренебречь ввиду его малости по сравнению с суммой остальных слагаемых. Первый ряд в формуле (7.20) представляет собой тригонометрический ряд Фурье. Для получения суммы этого ряда с погрешностью, не превосходящей 1%, в нем достаточно удержать лишь первые четыре члена.

Отметим, что, в частности из полученных формул при $\tau \rightarrow \infty$, $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon = 0$, $\tau \neq \infty$ соответственно получаются формулы для определения поля давлений для стационарного случая и в условиях замкнуто – упругого режима.

7.2.2. Круговая залежь

Теперь рассмотрим вышеприведенную задачу в случае, когда разрабатываемый пласт имеет круговую форму. В этом случае пластовое давление удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению и условиям:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} - \delta_o^2 P =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial \tau_1} - \sum_{j=1}^N Q_j \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_j) \delta(\varphi - \varphi_j), \quad (7.21)$$

$$\left. \begin{aligned} P(\rho, \varphi, \tau_1) \Big|_{\tau_1=0} &= 0, & \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} &= 0, \\ P(\varphi, \rho, \tau_1) \Big|_{\rho \rightarrow 0} &\neq \infty, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \right\}, \quad (7.22)$$

где

$$\rho = r / R_k, \quad \tau_1 = \chi t / R_k^2, \quad \delta_o^2 = \alpha^2 R_k^2,$$

R_k – радиус кругового непроницаемого контура.

Аналогично предыдущему случаю применением метода функции Грина и конечных интегральных преобразований к задаче (7.21) – (7.22) для определения поля давлений при работе в пласте одной круговой батареи равно дебитных скважин $\rho_j = \rho_o$, $\varphi_j = \frac{2\pi}{N}(j-1)$ получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{2\pi k\epsilon}{\mu q} (P_o - P) = N \left\{ \frac{I_o(\delta_o \rho)}{\delta_o} - \right. \\ &+ \frac{\delta_o}{4N} \ln(\rho^{2N} + \rho_o^{2N} - 2\rho^N \rho_o^N \cos N\varphi) - \\ &- \frac{\delta_o}{2} \ln \frac{\delta_o e^c}{2} - \delta_o \sum_{m=1}^{\infty} D_m(\rho) \cos mN\varphi - \\ &\left. - \frac{\delta_o}{2} \left[\begin{array}{l} -I_o(\delta_o \rho) \ln \frac{\delta_o \rho_o e^c}{2}, \quad \rho < \rho_o \\ K_o(\delta_o \rho) \end{array} \right], \quad \rho > \rho_o \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\rho) \exp[-(\delta_o^2 + \lambda_{on}^2)\tau] - \\
 & - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn}(\rho) \exp[-(\delta_o^2 + \lambda_{mn}^2)\tau] \times \\
 & \times \cos mN\varphi - \frac{1}{\delta_o^2} \exp(-\delta_o^2\tau) \Big\}, \quad (7.23)
 \end{aligned}$$

где

$$D_m(\rho) = \frac{I_{mN}(\delta_o\rho_o)I_{mN}(\delta_o\rho)K_{mN}(\delta_o)}{I_{mN}(\delta_o)},$$

$$E_n(\rho) = \frac{J_o(\lambda_{on}\rho)J_o(\lambda_{on}\rho_o)}{(\delta_o^2 + \lambda_{on}^2)J_o^2(\lambda_{on})},$$

$$\Phi_{mn}(\rho) = \frac{J_{mN}(\lambda_{nm}\rho)J_{mN}(\lambda_{nm}\rho_o)}{(1 - m^2/\lambda_{nm}^2)J_{mN}^2(\lambda_{nm})} \cdot \frac{1}{\delta_o^2 + \lambda_{on}^2},$$

λ_{nm} - неотрицательные корни уравнения

$$J_n(\lambda_{nm}) = 0, \quad (7.24)$$

$C=0,5772$ -число Эйлера.

Формула (7.23) получена при малых значениях аргумента функции Бесселя $I(x)$, $K(x)$.

Отметим, что корни уравнения (7.24) λ_{nm} при больших значениях N оказываются достаточно большими. Поэтому ряды, входящие в (7.23) и содержащие экспоненты, очень быстро сходятся. С учетом вышесказанного из (7.23) при $\rho = \rho_o + \rho_c$, $\varphi = 0$ находим перепад давления в скважине в виде:

$$\Delta P_c = N \left\{ \frac{1}{\delta_o} - \frac{\delta_o}{2N} \ln \frac{\rho_o}{N\rho_c} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\delta_o^2} \exp(-\delta_o^2 \tau) - \delta_o \sum_{m=1}^{\infty} D_m(\rho_o) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\rho_o) \exp[-(\delta_o^2 + \lambda_{on}^2) \tau] \right\}, \quad (7.25)$$

где λ_{on} - определяются из уравнения

$$J_n(\lambda_{on}) = 0, \quad \rho_o = R_s / R_k, \quad \rho_c = R_c / R_k$$

В заключение отметим, что при помощи вышеуказанного приема можно решить различные нестационарные задачи подземной гидродинамики.

Глава VIII. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ФЛЮИДОВ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТРЕЩИНОВАТО- ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

8.1. О методах решения исследуемого класса задач и сравнительная оценка различных моделей фильтрации

Как известно, фильтрация флюидов в трещиновато-пористой среде - явление качественно отличное от фильтрации в обычной гранулярной среде.

Основное дифференциальное уравнение, описывающее неустановившуюся однофазную плоскорадиальную фильтрацию жидкости, в таких пластах имеет вид [3]:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial U_n}{\partial \xi} \right) = \beta^{2-n} \frac{\partial U_n}{\partial \tau} + (-1)^n v_n (U_2 - U_1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1)$$

где

$$U_n = \frac{P_{12}}{P_0} - 1; \quad v_n = \frac{\alpha r^2}{k_n}; \quad \xi = \frac{r}{R_c}; \quad \alpha = k_2 F; \quad \tau = \frac{k_2 t}{\mu \beta_2 R_c^2}; \quad \beta = \frac{\beta_1 k_2}{\beta_2 k_1}$$

F- удельная поверхность. Здесь и в дальнейших параграфах, индекс n=1 относится к системе трещин, а индекс n=2 – к системе пор. Остальные обозначения общепринятые.

Точное решение большинства из решаемых гидродинамических задач, связанных с системой (8.1), даже при простейших начальных и граничных условиях наталкивается на значительные математические трудности и в настоящее время в литературе отсутствует.

Существуют работы [7,18,20,26,59,67 и др.], в которых система уравнений (8.1) решалась различными способами. При этом либо делались какие-то упрощающие допущения при постановке задачи или в процессе решения, либо решения находились для верхнего и нижнего пределов, между которыми заключено истинное точное решение [2].

Гораздо более развитой областью являются исследования так называемых усеченных моделей фильтрации, получающихся из системы (8.1), в которой соответственно принимается $K_2 = 0$, $\beta_1 = 0$ или только $K_2 = 0$.

Точное решение задач о притоке однородной жидкости к прямолинейной галерее и к скважине произвольного радиуса, работающей с заданным дебитом в трещиновато-пористом пласте с пренебрежимо малой проницаемостью блоков и любым соотношением упругоэластичности систем трещин и блоков, получены в [59].

Как отмечено в работах [61], в природных условиях во многих случаях встречаются трещиновато-кавернозные среды, у которых величины K_n , β_n могут принимать самые различные значения и принятие $K_2 = 0$, $\beta_1 = 0$ не всегда допустимо. В таких случаях для исследования процесса фильтрации необходимо пользоваться полной системой уравнений (8.1) с соответствующими условиями.

В этом аспекте в литературе при решении задачи о восстановлении давления в скважине, дренирующей трещиновато-пористый пласт, приближенно определен диапазон времени, для которых следует учитывать трещинную пористость и проницаемость системы пор.

В работе [55] для решения различных одномерных нестационарных задач фильтрации флюидов в трещиновато-пористых пластах, описываемых системой уравнений (8.1), предлагается использовать метод интегральных соотношений.

Достаточно полный обзор этих исследований можно найти в [67,68].

Несмотря на обширную информацию, основанную на многочисленных исследованиях, рассматриваемый вопрос остается полностью нерешенным и требует дальнейшего изучения, что необходимо, с одной стороны для оценки применимости приближенных решений, полученных в вы-

шеуказанных работах, а с другой - для нахождения асимптотических формул, необходимых при интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин.

В связи с этим, в данной работе, для определения границ применимости усеченных моделей фильтрации при любых соотношениях проницаемостей и упругоёмкостей системы трещин и блоков, предлагается использовать метод, базирующийся на численном обращении интегрального преобразования Лапласа. На основе этого дается численно-аналитический алгоритм решения задач, изучаются вопросы применимости предложенного метода с помощью метода конечных разностей и интегральных соотношений, приводятся результаты расчетов конкретной задачи.

Краевая задача для осесимметричной фильтрации однородной жидкости к скважине в бесконечном пласте в случае использования системы (8.1) формулируется следующим образом: найти функции $U_n(\xi, \tau)$, удовлетворяющие в данной области $D = \{0 < \xi < \infty, 0 < \tau < \infty\}$ системе уравнений (8.1) и граничным и начальным условиям:

$$U_1(\xi, \tau)|_{\xi \rightarrow \infty} = U_2(\xi, \tau)|_{\xi \rightarrow \infty} = 0, \quad (8.2)$$

$$U_1(\xi, \tau)|_{\xi=1} = U_2(\xi, \tau)|_{\xi=1}, \quad (8.3)$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial U_2}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=1} = Q_0, \quad (8.4)$$

$$U_1(\xi, \tau)|_{\tau=0} = U_2(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad (8.5)$$

где
$$\varepsilon = \frac{k_2}{k_1}; \quad Q_0 = \frac{\mu_0 Q_N}{2\pi b k_1 P_0}$$

Решение краевой задачи (8.1)-(8.5) с помощью преобразования Лапласа имеет вид [59]:

$$\bar{\psi}_{1s}(\xi, s) = \frac{a_2(a_1 - 1)\omega_1(\xi, s) - a_1(a_2 - 1)\omega_2(\xi, s)}{\Omega_0(\xi, s)} \quad (8.6)$$

$$\bar{\psi}_{2s}(\xi, s) = \frac{(a_1 - 1)\omega_1(\xi, s) - (a_2 - 1)\omega_2(\xi, s)}{\Omega_0(\xi, s)}, \quad (8.7)$$

где $a_1 = 1 + \frac{s - \sigma_1^2}{\nu_2}; a_2 = 1 + \frac{s - \sigma_2^2}{\nu_2};$

$$\omega_1(\xi, s) = k_0(\sigma_1)k_0(\sigma_2, \xi); \quad \omega_2(\xi, s) = k_0(\sigma_2)k_0(\sigma_1, \xi)$$

$$\Omega_0(\xi, s) = \frac{1}{\bar{\mu}R_c^2} \{k_1s[\sigma_2(a_2 + \varepsilon)(a_1 - 1)k_0(\sigma_1)k_1(\sigma_2) - \\ - \sigma_1(a_1 + \varepsilon)(a_2 - 1)k_0(\sigma_2)k_1(\sigma_1)]\}$$

$$\sigma_1^2 = H_1 + \sqrt{H_1^2 - H_2}; \quad \sigma_2^2 = H_1 - \sqrt{H_1^2 - H_2}; \quad H_1 = 0,5(s\beta + \nu_2 + s + \nu_1);$$

$$H_2 = s^2\beta + s(\nu_2\beta + \nu_1); \quad \bar{\mu} = \frac{\mu_0}{\mu}; \quad \mu = 1\text{Па} \cdot \text{с}; \quad k_0(z), \quad k_1(z) -$$

соответственно функции Макдональда нулевого и первого порядка;

$$\bar{\psi}_{ns}(\xi, s) = -\frac{2\pi b R_c^2 U_{ns} P_0}{\mu Q_\nu}; \quad U_{ns} = \int_0^\infty U_n(\xi, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (8.8)$$

s – параметр преобразования Лапласа.

Ввиду сложности выражений (8.6) и (8.7) переход от изображения функции $\Psi_{ns}(\xi, s)$ к оригиналу будем осуществлять методом численного обращения преобразования Лапласа по формуле [37]:

$$\psi_n(\xi, \tau) = \frac{\ell n 2}{\tau} \sum_{i=1}^N V_i \bar{\psi}_{ns}\left(\xi, \frac{\ell n 2}{\tau} i\right), \quad (8.9)$$

где $V_i = (-1)^{\frac{N}{2}+1} \sum_{k=\lceil \frac{i+1}{2} \rceil}^{\min(1, \frac{N}{2})} \frac{k^{\frac{N}{2}} (2k)!}{\left(\frac{N}{2} - k\right)! k!(k-1)!(i-k)!(2k-i)!}$ (8.10)

Количество перетока жидкости через систему блоков к системе трещин в каждый момент времени определяется формулой [3]:

$$W(\varepsilon) = \frac{2\pi b a R_c^2}{\mu_0} \int_1^\infty \xi [P_2(\xi, \tau) - P_1(\xi, \tau)] d\xi \quad (8.11)$$

С учетом (8.6) и (8.7) выражение (8.11) в изображениях принимает вид:

$$W(s) = \frac{a Q_\nu R_c^2 (a_1 - 1)(a_2 - 1)}{k_1 \varphi_0(s)} \left[\frac{k_0(\sigma_2) k_1(\sigma_1)}{\sigma_1} - \frac{k_0(\sigma_1) k_1(\sigma_2)}{\sigma_2} \right], \quad (8.12)$$

где $\varphi_0(s) = s[\sigma_2(a_2 + \varepsilon)(a_1 - 1)k_0(\sigma_1)k_1(\sigma_2) - \sigma_1(a_1 + \varepsilon)(a_2 - 1)k_0(\sigma_2)k_1(\sigma_1)]$

Переход от функции изображения $W(s)$ к ее оригиналу осуществляется с помощью формул (8.9) и (8.10).

В случае замкнуто-упругого режима условие на границе пласта запишется в виде:

$$\left. \frac{\partial U_n}{\partial \xi} \right|_{\xi=R_k} = 0, \quad n = \overline{1, 2} \quad (8.13)$$

Используя ту же методику, что и для предыдущего случая, решаем задачу аналогичным путем.

С целью количественной оценки влияния проницаемости системы блоков и упругоэластичности системы трещин на фильтрационные характеристики, а также для обоснования применимости предлагаемого метода конечных разностей и интегральных соотношений проведены расчеты для различных вариантов исходных параметров.

При вычислениях принимались:

$$\begin{aligned} K_1 &= (10^{-13}; 8 \cdot 10^{-14}; 5 \cdot 10^{-14}; 10^{-14}) \text{ м}^2; \\ K_2 &= (10^{-16}; 0,05 \cdot 10^{-14}; 10^{-15}; 0,5 \cdot 10^{-14}; 5 \cdot 10^{-14}) \text{ м}^2; \\ \beta_1 &= (3,06 \cdot 10^{-12}; 1,53 \cdot 10^{-11}; 1,06 \cdot 10^{-10}) \text{ Па}^{-1}; \beta_2 = 2,04 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \\ \alpha &= 7,6 \cdot 10^{-15}; \mu_0 = 13 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с} \text{ и различных значений } r \text{ и } t. \end{aligned}$$

Результаты расчетов оформлены в виде графиков и таблиц.

На рис.8.1 приведены зависимости фильтрационных сопротивлений от времени, вычисленные по формуле (8.9) и по формуле (8.2) работы [59], полученной из вырожденной системы уравнений (8.1) при $K_2 = 0$, $\beta_1 \neq 0$.

Кривые, представленные на рис.8.1 и 8.2, показывают весьма существенное влияние значения проницаемостей K_1 и K_2 на распределения фильтрационных сопротивлений в системах блоков и трещин, причем характер этого влияния зависит как от времени, так и от координаты r . Уменьшение проницаемости в системе трещин естественно приводит к увеличению фильтрационных сопротивлений. Резкое увеличение фильтрационного сопротивления в окрестности скважины наблюдается в начальный момент времени. С улучшением проницаемости K_2 фильтрационные сопротивления уменьшаются и в блоках, и в трещинах.

На рис. 8.3 указана зависимость относительной погрешности результатов, полученных по усеченной модели [59].

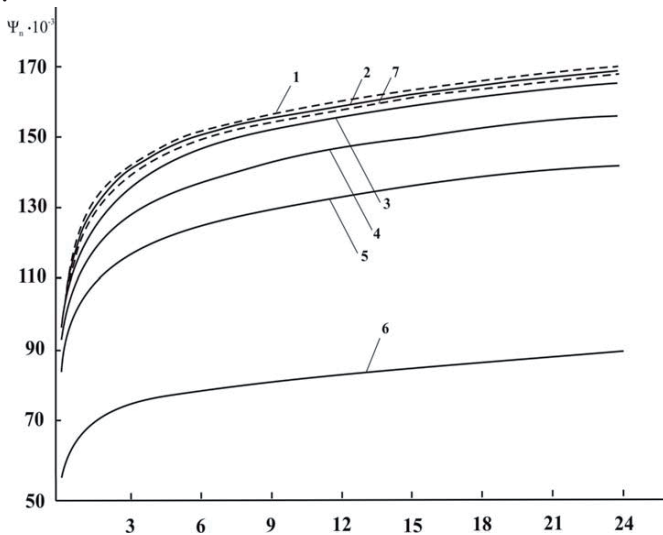


Рис. 8.1 Зависимость фильтрационных сопротивлений от времени при $K_1 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$; $r = 0,1 \text{ м}$

1 - $K_2 = 10^{-16} \text{ м}^2$, 2 - $K_2 = 5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$, 3 - $K_2 = 10^{-15} \text{ м}^2$,
 4 - $K_2 = 5 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$, 5 - $K_2 = 10^{-14} \text{ м}^2$, 6 - $K_2 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$, 7 - $K_2 = 0$

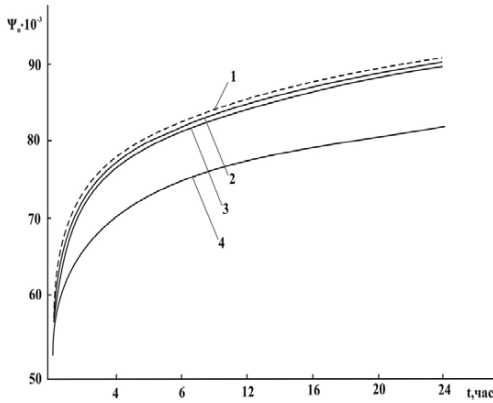


Рис. 8.2. Зависимость фильтрационных сопротивлений от времени при $K_{01} = 10^{-14} \text{ м}^2$; $r = 0,1 \text{ м}$
 2 - $K_{02} = 10^{-16} \text{ м}^2$, 3 - $K_{02} = 10^{-15} \text{ м}^2$, 4 - $K_{02} = 10^{-14} \text{ м}^2$, 1 - $K_{02} \neq 0$

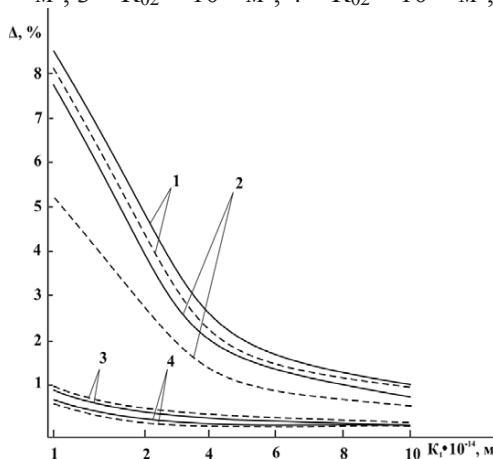


Рис.8.3. Зависимость относительной погрешности для функции от K_1 по результатам расчетов, полученных по формулам (4.9) и (22) в [55]
 1 - $K_2 = 10^{-15} \text{ м}^2$, $t = 960 \text{ час}$; 2 - $K_2 = 10^{-15} \text{ м}^2$, $t = 0,166 \text{ час}$;
 3 - $K_2 = 10^{-16} \text{ м}^2$, $t = 960 \text{ час}$; 4 - $K_2 = 10^{-16} \text{ м}^2$, $t = 0,166 \text{ час}$.
 — - $r = 0,1 \text{ м}$, - - - - $r = 10 \text{ м}$

Погрешность определялась по формуле:

$$\Delta = \frac{|\psi_n - \psi_{\text{нyc}}|}{\psi_n} 100\%$$

Из кривых видно, что с увеличением параметра K_1 при любых значениях K_2 и t относительная погрешность сильно уменьшается. При малых значениях K_1 увеличение K_2 приводит к резкому увеличению Δ , а с увеличением K_1 эти значения ослабевают и стремятся к нулю.

Во всех вариантах при малых значениях K_1 увеличение расстояния и времени приводит к увеличению относительной погрешности Δ .

Результаты выполненных машинных экспериментов свидетельствуют, что переход от полной модели трещиновато-пористой среды к вырожденной в рассматриваемых случаях оправдан при отношениях абсолютных значений проницаемостей системы блоков и трещин, удовлетворяющих неравенству:

$$\varepsilon = \frac{K_2}{K_1} \leq 0,01$$

Максимальное расхождение при этом не превышает 1%. Все это согласуется с ранее сделанными выводами [59]. Точность формул, полученных по усеченной модели, существенно падает по мере роста параметра K_2 и уменьшения значения проницаемости системы трещин K_1 .

На рис.8.4 и 8.5 приведены кривые зависимости от времени и расстояний функций $\Delta\Psi_n = \Psi_1 - \Psi_2$, $\Psi_n(r,t)$. Из кривых видно, что увеличение расстояния от контура скважин оказывает на разность фильтрационных сопротивлений существенное влияние до определенного значения. При малых значениях проницаемости блоков, чем меньше время, тем значительнее разница фильтрационных сопротивлений между системами блоков и трещин. С течением времени разность филь-

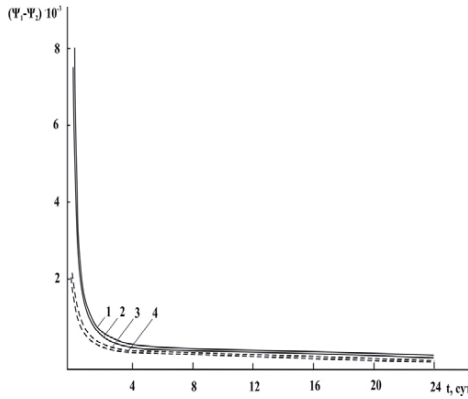


Рис.8.4. Зависимость разности фильтрационных сопротивлений в системах блоков и трещин от времени для различных значений K_1 и r при $K_2 = 10^{-16} \text{ м}^2$:

1,3 – $K_1 = 10^{-14} \text{ м}^2$, соотв. $r = 1 \text{ м}; 10 \text{ м}$;

2,4 – $K_2 = 10^{-14} \text{ м}^2$, соотв. $r = 1 \text{ м}; 10 \text{ м}$

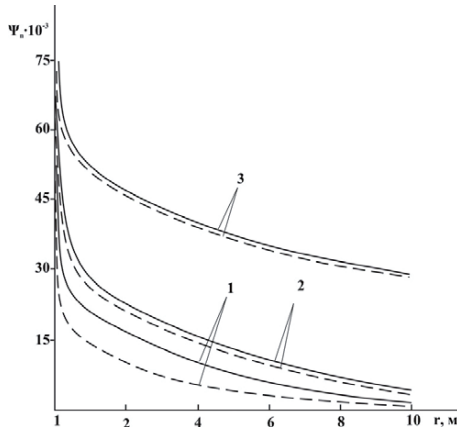


Рис.8.5. Зависимость фильтрационных сопротивлений от координаты r при различных значениях времени для

$K_1 = 10^{-13} \text{ м}^2$, $K_2 = 10^{-16} \text{ м}^2$, $\beta_1 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}$, $\beta_2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$

1 - $t = 0,166$ час. 2 - $t = 1$ час, 3 - $t = 24$ час

трационных сопротивлений резко уменьшается и стремится к нулю при $t=t_0$. Момент времени $t=t_0$ означает время полного истощения начального запаса жидкости в системах трещин, следовательно, дальнейший процесс фильтрации в трещиновато-пористом пласте будет осуществляться за счет объема жидкости, находящейся в системе блоков среды.

Согласно сказанному при больших значениях времени процесс фильтрации будет описываться обычным уравнением пьезопроводности для гранулярной среды. Тогда выражение (8.6) в оригиналах принимает вид [96]:

$$\psi(r, t) = \frac{\bar{\mu}R_c^2}{2k_1} E_1\left(-\frac{r^2}{4\chi t}\right), \quad (8.14)$$

где
$$\chi = \frac{k_1}{\mu_0\beta_2}$$

Наиболее характерным свойством переходных процессов в трещиноватой породе является запаздывание по сравнению со скоростью протекания аналогичного процесса в обычной пористой среде [19]. Для сравнения времени выравнивания фильтрационных сопротивлений в трещиновато-пористой и пористой средах нами проведены расчеты по формуле (8.14).

Сравнение динамики изменения во времени фильтрационных сопротивлений в пористой и трещиновато-пористой средах одинаковой пьезопроводности показывает, что в трещиновато-пористой среде процессы происходят с запаздыванием вследствие большего объема жидкости, находящейся в малопроницаемых блоках. Замена трещиновато-пористой среды пористой возможна только при малых значениях проницаемости пористых блоков. Увеличение значения проницаемости K_2 приводит к резкому расхожде-

нию между значениями фильтрационных сопротивлений, вычисленных для этих сред.

В таблицах 8.1-8.3 для различных режимов разработки приведены результаты расчетов для функции $\Psi_n(r,t)$ в зависимости от упругоэластичности системы трещин β_1 для различных моментов времени и расстояний. Для всех вариантов в начальный момент времени упругоэластичность системы трещин оказывает существенное влияние на фильтрационные сопротивления. С увеличением времени влияние на величину фильтрационного сопротивления $\Psi_n(r,t)$ при упруговодонапорном режиме пренебрежимо уменьшается, в то время как при замкнуто-упругом режиме, начиная с некоторого момента времени, оно все более возрастает.

При малых значениях расстояния от устья скважины (табл.8.2) влияние упругоэластичности трещин при упруговодонапорном режиме на фильтрационное сопротивление, как в системе трещин, так и в системе блоков мало, а при замкнуто-упругом режиме влияние β_1 существенно.

Таблица 8.1

Результаты расчетов по учету влияния упругоэластичности трещин на значение фильтрационного сопротивления при $R_k=500\text{м}$

t, сек	Фильтрационное сопротивление в трещинах и блоках					
	Упруговодонапорный режим			Замкнуто-упругий режим		
	$\beta_1=0$	$\beta_1\neq 0$	$\Delta(\%)$	$\beta_1=0$	$\beta_1\neq 0$	$\Delta(\%)$
10^2	51106	50294	1,6	51111	50299	1,6
$5 \cdot 10^2$	56173	55540	1,1	56177	55546	1,1
10^3	60047	59416	1,1	60051	59420	1,1
10^6	105290	104672	0,5	105369	104720	0,6
$5 \cdot 10^6$	112556	112442	0,1	123276	121404	1,5
10^7	112813	112808	0,004	143860	140117	2,7

Таблица 8.2

Результаты расчетов по учету влияния упругоэластичности трещин на значение фильтрационного сопротивления при $t=10^7$ с $R_k=500$ м

$r, м$	Фильтрационное сопротивление в трещинах и					
	Упруговодонапорный режим			Замкнуто-упругий режим		
	$\beta_1=0$	$\beta_1 \neq 0$	$\Delta(\%)$	$\beta_1=0$	$\beta_1 \neq 0$	$\Delta(\%)$
0,1	112812	112808	0,003	143860	140117	2,7
83,43	94010	94006	0,004	125057	121314	3,1
166,87	75207	75203	0,005	106255	102511	3,6
250,3	56404	56400	0,007	87453	83710	4,5
333,7	37601	37597	0,01	68672	64929	5,8
417,2	18799	18795	0,02	50242	46499	3,0

Таблица 8.3

Результаты расчетов по учету влияния упругоэластичности трещин на значение фильтрационного сопротивления при замкнуто-упругом режиме

$t, сек$	Фильтрационное сопротивление в трещинах					
	$R_k = 10$ м			$R_k = 200$ м		
	$\beta_1=0$	$\beta_1 \neq 0$	$\Delta(\%)$	$\beta_1=0$	$\beta_1 \neq 0$	$\Delta(\%)$
10^6	183438	174162	5,3	116187	113859	2,0
$6 \cdot 10^6$	285403	266857	6,9	141778	137124	3,4
$3 \cdot 10^6$	387367	359552	7,7	167367	160387	4,3
$4 \cdot 10^6$	489332	452247	8,2	192956	183649	5,1
$5 \cdot 10^6$	591296	544942	8,5	218545	206912	5,6
$6 \cdot 10^6$	693260	637637	8,7	244134	230174	6,1
$7 \cdot 10^6$	795225	730332	8,9	269722	253437	6,4
$8 \cdot 10^6$	897189	823027	9,0	295311	276699	6,7
$9 \cdot 10^6$	999722	915722	9,1	320900	299962	7,0
10^7	1101117	1008416	9,2	346489	323224	7,2

Из таблицы 8.3 также видно, что при упруговодонапорном режиме влияние β_1 на фильтрационные сопротивления $\Psi_n(r, t)$ не зависит от размеров залежи, в то время как при замкнуто-упругом режиме это влияние при малых размерах залежи существенно.

На рис.8.6 приводятся некоторые результаты расчетов, проведенных по численно-аналитическому методу, по методам конечных разностей [62], а также по соответствующей формуле работы [55], полученной с помощью метода интегральных соотношений. Сравнение кривых показывает применимость с большой точностью предлагаемого численно-аналитического метода.

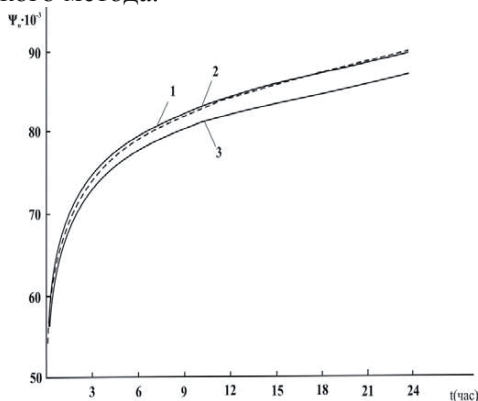


Рис.8.6. Зависимость фильтрационных сопротивлений от времени, вычисленных различными методами при $r = R_c$:

- 1- численно-аналитический метод;
- 2 – метод конечных разностей;
- 3 – метод интегральных соотношений

Изучение динамики перетока жидкости через границы системы трещин и блоков по длине пласта и во времени дает наглядное представление о характере распределения возмущения. Количественная оценка перетока жидкости из

системы блоков в систему трещин определялась по зависимостям (8.9)-(8.12) при следующих условиях:

$$\mu_0 = 13 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}; \quad \alpha = 7,2 \cdot 10^{-15}; \quad \tau' = \frac{t}{\tau_0}; \quad \tau_0' = \frac{\mu_0 \beta_2}{\alpha}$$

На рис.8.7, 8.8 показаны исходные кривые безразмерного интегрального объемного перетока жидкости между системами трещин и блоков для различных моментов времени τ' и различных соотношений параметров $\varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$ и

$$\varepsilon_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \text{ соответственно. Из приведенных кривых следует,}$$

что переток жидкости из системы блоков в систему трещин в начальный момент времени происходит интенсивно, а с возрастанием времени по мере выравнивания давления в системах трещин и блоков величина $\frac{W}{Q_v}$ стабилизируется.

Из рис. 8.7 и 8.8 также видно, что количество перетекающей жидкости из системы блоков в систему трещин в сильной мере зависит от ε_1 . Из анализа кривых следует, что чем меньше ε_1 , тем скорее наступает квазистационарный режим работы скважин. При очень малых значениях проницаемости блоков, например, при $\varepsilon_1 \leq 0,01$ количество перетекающей жидкости очень мало отличается от такового при $\kappa_2 = 0$. С увеличением проницаемости системы блоков влияние ее делается заметным, причем оно проявляется сильнее при больших значениях времени.

С увеличением ε_2 величина $\frac{W}{Q_v}$ резко уменьшается.

Так, например, с увеличением ε_2 от 0,1 до 1 количество перетекающей жидкости из системы блоков в систему трещин уменьшается в 2 раза.

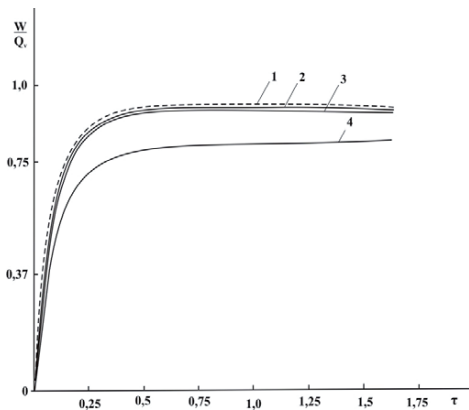


Рис.8.7. Зависимость интегрального объемного перетока жидкости между трещинами и блоками от безразмерного времени для различных значений ζ_1 при $\zeta_2 = 0,1$;
1 - $\zeta_1 = 0$; 2 - $\zeta_1 = 0,001$; 3 - $\zeta_1 = 0,01$; 4 - $\zeta_1 = 0,1$

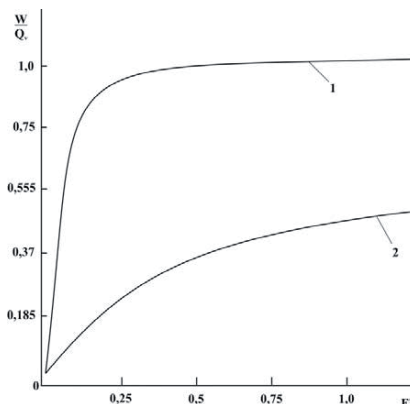


Рис.8.8. Зависимость интегрального объемного перетока жидкости между трещинами и блоками от безразмерного времени для различных значений ζ_2 при $\zeta_1 = 0,001$;
1 - $\zeta_2 = 0,1$; 2 - $\zeta_2 = 1$

Итак, применение указанного метода к решению нестационарных задач фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах дает хорошие результаты. Поэтому, используя этот метод и разработанные алгоритмы к готовым программам, можно подготовить таблицы для широкого набора входных физических параметров, для выбора той или иной модели трещиновато-пористой среды.

Таким образом, показана возможность применения метода численного обращения преобразования Лапласа для построения решений краевых задач нестационарной фильтрации жидкости в трещиновато-пористых пластах при любых соотношениях проницаемости и упругоёмкости системы трещин и блоков. Указан алгоритм реализации метода. На основе полученных решений показана область применимости усеченных моделей трещиновато-пористой среды в зависимости от значений параметров K_1 , K_2 , β .

8.2. Особенности фильтрации жидкости к прямолинейной галерее при нелинейно-упругом режиме

В настоящее время, возрастающее освоение месторождений с большими пластовыми давлениями приводит к настоятельной необходимости всестороннего исследования фильтрационных течений с учетом изменений физических свойств среды и флюида. В этом случае вышеупомянутая система дифференциальных уравнений принимает вид [62]:

$$\frac{\partial}{\partial t} [m_n(P_n)\rho(P_n)] - \operatorname{div} \left[\frac{k_n(P_n)\rho(P_n)}{\mu(P_n)} - \operatorname{grad} P_n \right] + (-1)^n q = 0; \quad n=1,2, \quad (8.15)$$

где, индекс $n=1$ относится к системе трещин, $n=2$ – к системе пор; q - функция перетока из блоков в трещины, которые определяются формулой [20]:

$$q = F^2 \left[\int_0^{P_2} \frac{k_2(P)\rho(P)}{\mu(P)} dP - \int_0^{P_1} \frac{k_2(P)\rho(P)}{\mu(P)} dP \right], \quad (8.16)$$

где F – удельная поверхность блоков.

В данном параграфе предлагается приближенно-аналитический метод решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (8.15) при определенных начальных и граничных условиях с применением способа линеаризации, предложенного в работе [36], и численного метода обращения преобразования Лапласа [3].

Предположим, что в конечном деформируемом трещиновато-пористом пласте прямолинейная галерея пущена в эксплуатацию с заданным дебитом. Фильтрация однофазной жидкости подчиняется закону Дарси. В момент времени $t=0$ пласт находится в невозмущенном состоянии. Требуется определить давление в любой точке пласта в системах трещин и блоков при любом $t > 0$.

Математически решение задачи приводится к интегрированию системы уравнений (8.15) в области $D= 0 < x < t$, $0 < t < \infty$ при следующих начальных и краевых условиях:

$$P_n|_{t=0} = P_0, \quad P_n|_{x=1} = P_0, \quad n = 1, 2 \quad (8.17)$$

$$P_1|_{x=0} = P_2|_{x=0} \quad (8.18)$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{k_n(P_n)\rho(P_n)}{\mu(P_n)} \frac{\partial P_n}{\partial x} \right\} \Big|_{x=0} = \frac{Q(t)}{bH} \quad (8.19)$$

Предположим, что изменение параметров, характеризующих жидкости и пласт, от давления происходит по экспоненциальному закону:

$$\begin{aligned} k_n(P_n) &= k_{on} \exp(\alpha_k(P_n - P_0)), \\ m_n(P_n) &= m_{on} + \beta_{cn}(P_n - P_0), \\ \mu(P_n) &= \mu_o \exp(\alpha_\mu(P_n - P_0)), \\ \rho(P_n) &= \rho_o \exp(\beta_{ж}(P_n - P_0)), \end{aligned} \quad (8.20)$$

Согласно работе [34] уравнение (8.15), условия (8.17) и (8.19) приводим к виду:

$$\beta^{2-n} \frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \bar{\rho}_n}{\partial \xi^2} + (-1)^n \nu_n (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1) = 0, \quad n = 1, 2 \quad (8.21)$$

$$\bar{\rho}_n|_{\tau=0} = 0, \quad \bar{\rho}_n|_{\xi=1} = 0 \quad (8.22)$$

$$\rho_1|_{\xi=0} = \rho_2|_{\xi=0} \quad (8.23)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0} = \bar{Q}_0(\tau), \quad (8.24)$$

где $\tau = \frac{k_{02} \beta_{ж} t}{\mu_0 \lambda_2 \beta_2 l^2}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \beta = \frac{\beta_1 k_{02} \lambda_1}{\beta_2 k_{01} \lambda_2}, \quad \varepsilon = \frac{k_{02} \lambda_1}{k_{01} \lambda_2},$

$$\bar{Q}_0(\tau) = \frac{\bar{Q}_v^{(\tau)} \mu_0 \lambda_1 l}{k_{01} H b}, \quad \bar{\rho}_n = \bar{\rho}(P_n) - \bar{\rho}_0, \quad \bar{\rho}(P_n) = \frac{\rho(P_n)}{\rho_0}, \quad \bar{\rho}_0 = 1 \quad (8.25)$$

$$\nu_n = \frac{\alpha l^2}{k_{012}} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2-n}, \quad \lambda_n = \frac{\beta_{ж} (P_{2n} - P_{1n})}{P_{2n} \int_{P_{1n}} \varphi(P_n) dP_n}, \quad \varphi(P_n) = \frac{k_n(P_n)}{\mu(P_n)}$$

Здесь $k_n(P_n)$, $m_n(P_n)$, $\mu(P_n)$, $\rho(P_n)$ – соответственно значения проницаемости и пористости пласта, вязкости и плотности жидкости или газа; k_{on} , m_{on} , μ_o , ρ_o – их значения при начальном пластовом давлении; α_k , β_{cn} , α_μ – соответственно коэффициенты, характеризующие изменения проницаемости, пористости пласта и вязкости жидкости при изменении давления.

Применяя для решения задачи (8.21)-(8.24) преобразование Лапласа по времени, после несложных преобразований имеем:

$$\bar{\rho}_{1s}(\xi, s) = \frac{\bar{Q}_{os}}{\varphi_o(s)} \{a_1(a_2 - 1)sh\sigma_2 sh\sigma_1(\xi - 1) - a_2(a_1 - 1)sh\sigma_1 sh\sigma_2(\xi - 1)\} \quad (8.26)$$

$$\bar{\rho}_{2s}(\xi, s) = \frac{\bar{Q}_{os}}{\varphi_o(s)} \{(a_2 - 1)sh\sigma_2 sh\sigma_1(\xi - 1) - (a_1 - 1)sh\sigma_1 sh\sigma_2(\xi - 1)\}, \quad (8.27)$$

где $\varphi_0(s) = s\{(a_2 - 1)(a_1 + \varepsilon)\sigma_1 ch\sigma_1 sh\sigma_2 - \sigma_2(a_1 - 1)(a_2 + \varepsilon)ch\sigma_2 sh\sigma_1\}$,

$$\sigma_1 = \sqrt{H_1 + \sqrt{H_1^2 - H_2}}, \quad \sigma_2 = \sqrt{H_1 - \sqrt{H_1^2 - H_2}}$$

$$a_1 = 1 + \frac{s - \sigma_1^2}{v_2}, \quad a_2 = 1 + \frac{s - \sigma_2^2}{v_2}$$

$$H_1 = 0,5[v_1 + v_2s(\beta + 1)], \quad H_2 = \beta s^2 + v_2s\beta + v_1s$$

В случае замкнуто-упругого режима условие (8.22) заменяется условием:

$$\left. \frac{\partial P_n}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (8.28)$$

и формулы (8.26) и (8.27) принимают вид:

$$\bar{\rho}_s(\xi, s) = \frac{\bar{Q}_{os}}{\varphi_0(s)} \{a_1(a_2 - 1)ch\sigma_2 ch\sigma_1(\xi - 1) - a_2(a_1 - 1)ch\sigma_1 ch\sigma_2(\xi - 1)\} \quad (8.29)$$

$$\bar{\rho}_{2s}(\xi, s) = \frac{\bar{Q}_{os}}{\varphi_0(s)} \{(a_1 - 1)ch\sigma_2 ch\sigma_1(\xi - 1) - (a_1 - 1)ch\sigma_1 ch\sigma_2(\xi - 1)\} \quad (8.30)$$

$$\bar{\rho}_{ns}(\xi, s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \bar{\rho}_n(\xi, \tau) d\tau \quad (8.31)$$

s – параметр преобразования Лапласа.

Ввиду сложности выражений (8.26), (8.27) и (8.30), (8.31) переход от изображения функции к оригиналу будем осуществлять методом численного обращения преобразования Лапласа.

Обоснование возможности применения общей теории численных методов обращения интегрального преобразования Лапласа для решения конкретных прикладных задач в области теории теплопроводности и гидродинамики непосредственно следует из работы [3]. Нами для численного перехода от изображения функций $\bar{\rho}_{ns}$ к оригиналу использован метод, приведенный в работе [3]. По этому методу

вычисления оригинала $\rho_n(\xi, \tau)$ связаны с интерполированием функции изображения $\bar{\rho}_{ns}(\xi, s)$. Находится приближенная зависимость, интерполирующая функции изображения $\bar{\rho}_{ns}(\xi, s)$ по значениям в фиксированных точках $s_k = \frac{\ell n 2}{\tau} k$. При этом вычисление оригинала функции по его изображению осуществляется с помощью следующей формулы:

$$\bar{\rho}_n(\xi, \tau) = \frac{\ell n 2}{\tau} \sum_{k=1}^N V_k \bar{\rho}_{ns}\left(\xi, \frac{\ell n 2}{\tau} k\right) \quad (8.32)$$

$$V_k = (-1)^{\frac{N}{2}+k} \frac{\sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\min\left(k, \frac{N}{2}\right)} \frac{m^{\frac{N}{2}} (2m)!}{\left(\frac{N}{2} - m\right)! m! (m-1)! (k-m)! (2m-k)!}}{\quad} \quad (8.33)$$

При практических расчетах достаточно ограничиться первыми десятью членами ряда (8.33). Связь между функциями $\rho_n(\xi, \tau)$ и $P_n(\xi, \tau)$ находим из (8.20) в следующем виде:

$$P_n - P_0 = \frac{1}{\alpha_k - \alpha_\mu} \ell n \left[1 + \frac{\alpha_k - \alpha_\mu}{\lambda} \ell n \bar{\rho}_n \right] \quad (8.34)$$

Количество перетока жидкости через систему блоков к системе трещин в каждый момент времени будет определяться по формуле:

$$W(\tau) = \frac{\alpha H l}{\mu_0} \int_0^1 [P_2(\xi, \tau) - P_1(\xi, \tau)] d\xi \quad (8.35)$$

Численные исследования проведены на ЭВМ для следующих вариантов задачи.

- а) общая нелинейная задача;
- б) линеаризованная задача;
- в) линейная задача для линейно-упругого режима.

Расчеты проводились при нижеследующих исходных данных:

$k_{01} = (10^{-13}; 5 \cdot 10^{-13}; 5 \cdot 10^{-14}) \text{м}^2$; $k_{02} = (10^{-16}; 10^{-15}; 10^{-14}) \text{м}^2$;
 $\mu_0 = 0,4905 \cdot 10^{-8} \text{МПа} \cdot \text{с}$; $\beta_1 = (2,04 \cdot 10^{-5}; 2,04 \cdot 10^{-6}; 2,04 \cdot 10^{-7}) \text{МПа}^{-1}$;
 $\beta_2 = 2,04 \cdot 10^{-4} \text{МПа}^{-1}$; $\alpha = 0,76 \cdot 10^{-14}$; $Q_v = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{м}^3/\text{с}$; $l = 100 \text{м}$;
 $\alpha_k = 3,06 \cdot 10^{-2} \text{МПа}^{-1}$; $\beta_{ж} = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{МПа}^{-1}$; $b = 10 \text{м}$; $H = 10 \text{м}$;
 $P_0 = 29,43 \text{МПа}$.

На рис.8.9 и 8.10 представлены графики изменения во времени безразмерного давления на галерее $x=0$. Анализ кривых указанных зависимостей для исследованных вариантов задач позволяет выявить следующее.

Кривые, представленные на рис.8.9, показывают весьма существенное влияние значения проницаемостей k_{01} , k_{02} на изменение давления в галерее в зависимости от времени. Резкое падение давления в окрестности галереи наблюдается в начальный момент времени.

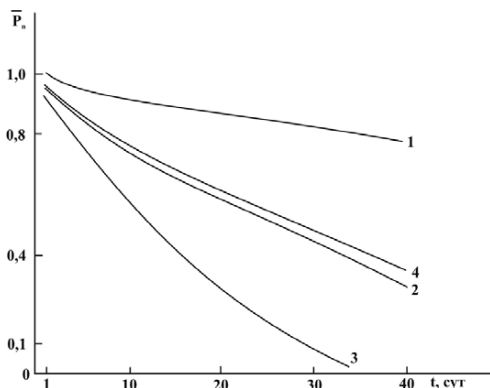


Рис.8.9. Зависимость безразмерного давления от времени на галерее $x=0$ для различных значений параметра

$$\xi_1 = K_{02} / K_{01} \text{ при } \xi_2 = \beta_1 / \beta_2 = 0,1$$

1 - $\xi_1 = 0,0002$; 2 - $\xi_1 = 0,0001$; 3 - $\xi_1 = 0,002$; 4 - $\xi_1 = 0,1$

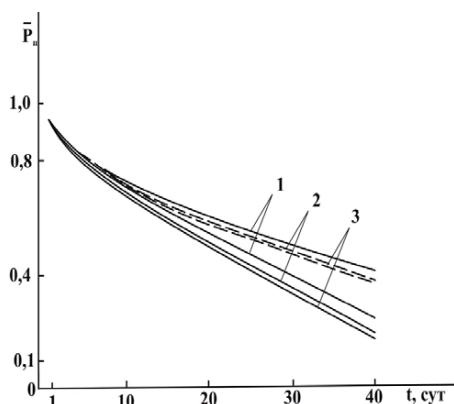


Рис.8.10. Зависимость безразмерного давления от времени на галерее $x=0$ для различных значений параметра $\xi_2 = \beta_1 / \beta_2$ при $\xi_1 = K_{02} / K_{01} = 10^{-3}$:
 1 - $\xi_2 = 0,2$; 2 - $\xi_2 = 0,02$; 3 - $\xi_2 = 0,006$.
 — - соответствуют нелинейно-упругому,
 - - - - линейно-упругому режиму

На рис.8.10 видно, что влияние нелинейности $k_n(P_n)$ на значение безразмерного давления со временем возрастает. Так, например, при $t=10$ сут. и $\beta_1=2,04 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$ разница \bar{P}_n в линейном и нелинейном случае составляет 3,4%, а при $t=40$ сут.- 43%.

Для всех вариантов изменение значения упругоёмкости системы трещин оказывает существенное влияние на давление.

В таблице 8.4 для сравнения приведены результаты расчетов по предложенному численно-аналитическому методу (ЧАМ) и методам конечных разностей (МКР). Как видно, предложенный метод отличается достаточной точностью, и максимальная погрешность не превышает 3%.

Таблица 8.4

Значения величины безразмерного давления на галерее
(сравнение с методом конечных разностей)

t	\bar{P}_n	\bar{P}_n	Δ, %
	ЧАМ	МКР	
$6 \cdot 10^3$	0,98045	0,97834	0,2
$6 \cdot 10^4$	0,94568	0,93289	1,4
$16 \cdot 10^4$	0,93770	0,91682	2,3
$18 \cdot 10^4$	0,93601	0,91166	2,7
$24 \cdot 10^4$	0,93565	0,90988	2,8
$30 \cdot 10^4$	0,93558	0,90919	2,9
$36 \cdot 10^4$	0,93556	0,90887	2,9
$46 \cdot 10^4$	0,93556	0,90869	2,9
$48 \cdot 10^4$	0,93556	0,90857	3,0
$54 \cdot 10^4$	0,93556	0,90847	3,0
$60 \cdot 10^4$	0,93556	0,90839	3,0

При составлении таблицы 8.4 были приняты:

$$k_{01}=10^{-13} \text{ м}^2; k_{02}=10^{-16} \text{ м}^2;$$

$$\beta_1=2,04 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}$$

Таким образом, при нелинейной нестационарной фильтрации флюидов в трещиновато-пористом пласте для приближенно-аналитического решения нелинейных задач доказана возможность применения метода численного преобразования Лапласа в комбинации с методом линеаризации исходных нелинейных систем дифференциальных уравнений.

8.3. Осесимметричная неустановившаяся фильтрация в бесконечном пласте

Система уравнений, описывающая процесс фильтрации жидкости, имеет вид [3,27]:

$$\frac{\partial}{\partial t} [m_n(P_n) \rho(P_n)] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{k_n(P_n) \rho(P_n)}{\mu(P_n)} \frac{\partial P_n}{\partial r} \right] + (-1)^n q = 0, \quad n = 1, 2 \quad (8.36)$$

Рассмотрим решение системы нелинейных уравнений (8.36) на примере задачи о фильтрации однородной жидкости к центральной скважине радиусом R_c , вскрывающей пласт мощностью b и работающей с расходом $Q(t)$ в круговом бесконечном трещиновато-пористом пласте. Перед пуском скважины в эксплуатацию давление во всем пласте считается постоянным и равным $P_1=P_2=P_0$.

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$P_n(r,t)|_{t=0} = P_0, \quad P_n(r,t)|_{t=\infty} = P \quad (8.37)$$

$$P_1(r,t) = P_2(r,t), \quad r = R_c \quad (8.38)$$

$$r \sum_{n=1}^2 \frac{k_n(P_n) \rho(P_n)}{\mu(P_n)} \frac{\partial P_n}{\partial r} = \frac{Q(t)}{2\pi b}, \quad r = R_c \quad (8.39)$$

Для решения задачи (8.36)-(8.39) будем применять способ линеаризации, приведенный в предыдущем параграфе. Принимая,

$$\lambda_n = \frac{\bar{\mu}(P_n)}{\bar{k}_n(P_n) \bar{\rho}(P_n)} \frac{d\bar{\rho}(P_n)}{dP_n}, \quad (8.40)$$

$$q = \frac{\alpha \rho_0}{\mu_0} \left[\int_0^{P_2} \frac{\bar{k}_2(P) \bar{\rho}(P)}{\bar{\mu}(P)} \frac{dP}{d\bar{\rho}(P)} d\bar{\rho}(P) - \int_0^{P_1} \frac{\bar{k}_2(P) \bar{\rho}(P)}{\bar{\mu}(P)} \frac{dP}{d\bar{\rho}(P)} d\bar{\rho}(P) \right] = \quad (8.41)$$

$$= \frac{\alpha \rho_0}{\mu_0 \lambda_2} [\bar{\rho}(P_2) - \bar{\rho}(P_1)]$$

систему уравнений (8.36) и условия (8.37)-(8.39) приводим к следующему виду:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial \xi} \right) = \beta^{2-n} \frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial \tau} + (-1)^n \nu_n (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1), \quad n = 1, 2$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_n(\xi, \tau) \Big|_{\substack{\tau=0 \\ \xi \rightarrow \infty}} &= \bar{\rho}_0 \\ \bar{\rho}_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=1} &= \bar{\rho}_2(\xi, \tau) \Big|_{\xi=1} \\ \xi \left(\frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial \xi} + \bar{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=1} &= \bar{Q}_0(\tau) \end{aligned} \right\}, \quad (8.42)$$

где

$$\xi = \frac{r}{R_c}; \quad \bar{v}_n = \frac{\alpha R_c^2}{k_{on}} \bar{\lambda}; \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad \bar{\rho}_n = \bar{\rho}(P_n) - \bar{\rho}_0; \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \lambda$$

$$\bar{Q}_v(\tau) = \frac{\mu_0 \bar{Q}(\tau) \lambda_1}{2\pi b k_{01} \rho_0}; \quad \alpha = k_{02} F^2; \quad \bar{\rho}_0 = 1$$

Решение, полученное после применения к задаче (8.42) преобразования Лапласа, совпадает с решением линейной задачи, приведенной в §8.1 с той лишь разницей, что функции $U_n(\xi, \tau)$, $\Psi_{n,s}(\xi, \tau)$ соответственно заменяются функциями $\bar{\rho}_n(\xi, \tau)$, $-\frac{\bar{\mu} R_c^2 \rho_{n,s}(\xi, s)}{\bar{Q}_0}$

Кроме того, в выражении (8.6), (8.7) параметры надо брать равными:

$$v_1 = \frac{\alpha R_c^2}{k_{01}} \bar{\lambda}; \quad \varepsilon = \bar{\lambda} \frac{k_{02}}{k_{01}}; \quad \beta = \frac{k_{02} \lambda_2 \beta_1}{k_{01} \lambda_1 \beta_2}; \quad \tau = \frac{k_{02} \beta_{ж} t}{\mu \beta_2 \lambda_2 R_c^2}$$

Переход от изображений $\tilde{\rho}_{n,s}(\xi, s)$ к оригиналу $\bar{\rho}_n(\xi, \tau)$ осуществляется численно по алгоритму (8.9), (8.10).

Полагая, что изменения проницаемости системы трещин и блоков и вязкость жидкости от давления подчиняются экспоненциальному закону, с учетом (8.40) для определения фильтрационных сопротивлений будем иметь:

$$\psi_n(\xi, \tau) = \frac{2\pi b R_c^2}{\mu_0 \bar{Q}_v} \left\{ \frac{1}{\alpha_k - \alpha_\mu} \ln \left[1 + \frac{\alpha_k - \alpha_\mu}{\lambda_n} \ln \bar{\rho}_n(\xi, \tau) \right] \right\} \quad (8.43)$$

На рис 8.11 приведены кривые, характеризующие зависимости фильтрационных сопротивлений от времени на забое скважины, вычисленные по формуле (8.43) и формулам (8.91)-(8.92) работы [25]. Как видно из этих графиков, для инженерных расчетов вполне допустимо использовать формулу (8.43). Сравнение кривых, соответствующих нелинейной и линейной задачам показывает, что неучет изменения проницаемости систем трещин и блоков и вязкости жидкости от давления может привести к ощутимым ошибкам в определении фильтрационных сопротивлений в системе блоков и трещин (в нашем примере ошибка равна 15,7%).

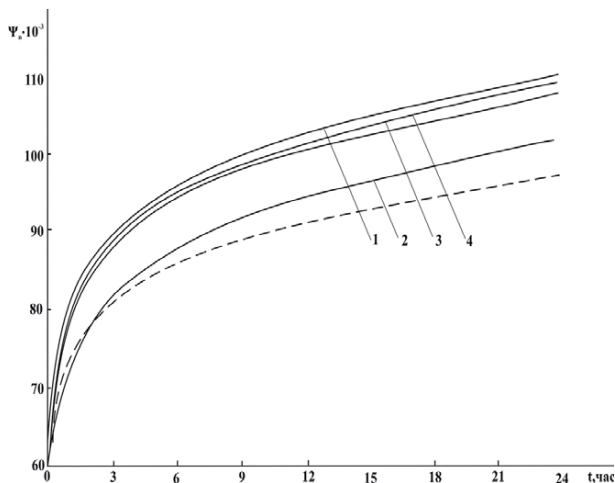


Рис. 8.11. Зависимость фильтрационных сопротивлений от времени, вычисленных различными методами при $r = R_c$:

- 1 – теория сравнения, 1 приближение (нижняя оценка);
 - 2 - теория сравнения, 1 приближение (нижняя оценка);
 - 3 - теория сравнения, 2 приближение (среднеарифмет.);
 - 4 – линеаризация.
- соответствует линейно-упругому режиму

8.4. Исследование нестационарной фильтрации жидкости к несовершенной скважине

Фильтрация жидкости к несовершенным скважинам в трещиновато-пористых средах из-за значительной сложности математической модели процесса исследована недостаточно. Некоторые частные случаи подобных задач приведены в работах [18,74]. Однако все эти исследования выполнены без учета проницаемости систем пористых блоков и упругоэластичности трещин.

Рассмотрим решение задачи фильтрации жидкости к центральной несовершенной по степени вскрытия скважине, работающей в круговом однородном трещиновато-пористом пласте, при любых соотношениях проницаемостей и упругоэластичности систем блоков и трещин.

Постановка задачи.

Предположим, что конечный цилиндрический трещиновато-пористый пласт мощностью H и радиусом R_k ограничен двумя непроницаемыми поверхностями и вскрыт скважиной радиусом R_c на глубине $L < H$ (рис.8.12). Перед пуском скважины в эксплуатацию с расходом $Q(t)$ давление во всем пласте считается постоянным и равным P_0 .

Требуется определить поле давления в системе блоков и трещин в любой точке и в любой момент времени.

Согласно теории фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, математически задача формулируется в виде следующей начально-краевой задачи [37]:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 U_n}{\partial \bar{z}^2} = \beta^{2-n} \frac{\partial U_n}{\partial \tau} + (-1)^n v_n (U_2 - U_1), \quad n=1,2 \quad (8.44)$$

$$U_n(\xi, \bar{z}, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad U_{12}(\xi, \bar{z}, \tau) \Big|_{\xi=R_k} = 0 \quad (8.45)$$

$$U_1(\xi, \bar{z}, \tau) \Big|_{\xi=1} = U_2(\xi, \bar{z}, \tau) \Big|_{\xi=1}$$

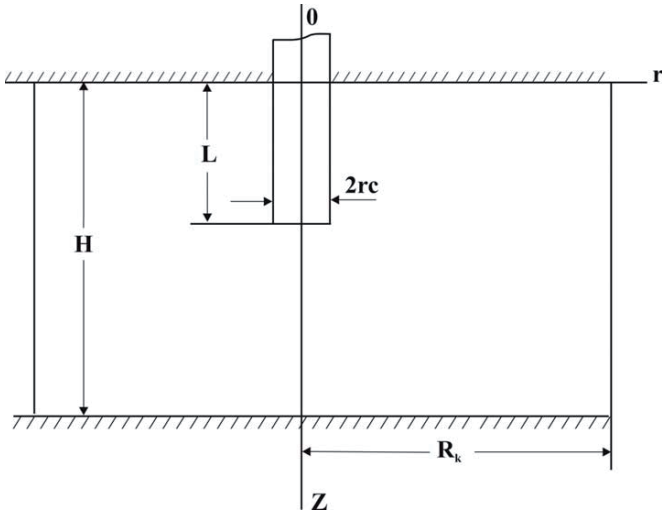


Рис. 8.12. Схема скважины, несовершенной по степени вскрытия

$$\xi \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial U_2}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=1} = \begin{cases} \bar{Q}_0(\tau), & \bar{z} \in (0, \bar{L}) \\ 0, & \bar{z} \in (\bar{L}, \bar{H}) \end{cases}, \quad (8.46)$$

где $\bar{Q}_0(\tau) = \frac{Q(\tau)\mu_0}{2\pi Lk_1P_0}$; $\bar{z} = \frac{z}{r_c}$; $\bar{R}_k = \frac{R_k}{r_c}$; $\bar{H} = \frac{H}{r_c}$; $\bar{L} = \frac{L}{r_c}$

Остальные обозначения как в параграфе 8.1.

Применяя конечное интегральное преобразование Фурье по переменным \bar{z} и преобразование Лапласа по переменной τ к задаче (8.44)-(8.46), окончательно для функции изображений будем иметь:

$$U_{1,j,s}(\xi, \lambda_j, s) = -\frac{\bar{Q}_{0,j,s}(s)}{\Omega(\sigma_1, \sigma_2)} \cdot [a_1(a_2 - 1)\Omega_1(\sigma_2)W_1(\xi, \sigma_1) - a_2(a_1 - 1)\Omega_1(\sigma_1)W_2(\xi, \sigma_2)]$$

$$U_{2,j,s}(\xi, \lambda_j, s) = -\frac{\bar{Q}_{0,j,s}(s)}{\Omega(\sigma_1, \sigma_2)} \cdot [(a_2 - 1)\Omega_1(\sigma_2)W_1(\xi, \sigma_1) - (a_1 - 1)\Omega_1(\sigma_1)W_2(\xi, \sigma_2)] \quad (8.47)$$

где

$$\begin{aligned} W_1(\xi, \sigma_1) &= I_0(\sigma_1, \xi)K_0(\sigma_1 \bar{R}_k) - I_0(\sigma_1 \bar{R}_k)K_0(\sigma_1 \xi); \\ W_2(\xi, \sigma_2) &= I_0(\sigma_2, \xi)K_0(\sigma_2 \bar{R}_k) - I_0(\sigma_2 \bar{R}_k)K_0(\sigma_2 \xi); \\ \Omega_1(\sigma_1) &= I_0(\sigma_1)K_0(\sigma_1 \bar{R}_k) - I_0(\sigma_1 \bar{R}_k)K_0(\sigma_1); \\ \Omega_2(\sigma_1) &= I_1(\sigma_1)K_0(\sigma_1 \bar{R}_k) + I_0(\sigma_1 \bar{R}_k)K_0(\sigma_1); \\ \Omega_1(\sigma_2) &= I_0(\sigma_2)K_0(\sigma_2 \bar{R}_k) - I_0(\sigma_2 \bar{R}_k)K_0(\sigma_2); \\ \Omega_2(\sigma_2) &= I_1(\sigma_2)K_0(\sigma_2 \bar{R}_k) + I_0(\sigma_2 \bar{R}_k)K_0(\sigma_2); \\ \Omega(\sigma_1, \sigma_2) &= \sigma_2(a_2 + \varepsilon)(a_1 - 1)\Omega_1(\sigma_1)\Omega_2(\sigma_1) \cdot \\ &\cdot (\sigma_2) - \sigma_1(a_1 + \varepsilon)(a_2 - 1)\Omega_1(\sigma_2)\Omega_2(\sigma_1) \end{aligned}$$

$$\sigma_1^2 = H_1(\lambda_j, s) + \sqrt{H_1^2(\lambda_j, s) - H_2(\lambda_j, s)};$$

$$\sigma_2^2 = H_1(\lambda_j, s) - \sqrt{H_1^2(\lambda_j, s) - H_2(\lambda_j, s)}$$

$$H_1(\lambda_j, s) = \lambda_j^2 + \frac{s + V_1 + V_2 + s\beta}{2};$$

$$H_2(\lambda_j, s) = \lambda_j^4 + \lambda_j^2(s + V_1 + V_2 + s\beta) + \beta s^2 + V_2\beta s + V_1 s;$$

$$a_1 \equiv 1 + V_2^{-1}(\lambda_j^2 + s - \sigma_1^2); \quad a_2 = 1 + V_2^{-1}(\lambda_j^2 + s - \sigma_2^2)$$

$$\bar{Q}_{0,j,s}(s) = \frac{\text{Sin} \lambda_j L}{\lambda_j} \int_0^\infty \bar{Q}_0(\tau) e^{-s\tau} d\tau;$$

$$U_{n,j,s}(\xi, \lambda_j, s) = \int_0^\infty \int_0^\infty U_n(\xi, z, \tau) \text{Cos}(\lambda_j, z) e^{-s\tau} dz d\tau \quad \lambda_j = \frac{\pi j}{H}$$

В случае бесконечного пласта условие $U_n(\xi, z, \tau)|_{\xi=R_k} = 0$ заменяется условием $U_n(\xi, z, \tau)|_{\xi=\infty} = 0$ и формулы (8.46)-(8.47) соответственно принимают вид:

$$U_{1,j,s}(\xi, \lambda_j, s) = -\frac{\bar{Q}_{0,j,s}(\lambda_j, s)}{\varphi(\sigma_1, \sigma_2)} \quad (8.48)$$

$$\left[a_2(a_2 - 1)k_0(\sigma_1)k_0(\sigma_2, \xi) - a_1(a_2 - 1)k_0(\sigma_2)k_0(\sigma_1, \xi) \right];$$

$$U_{2,j,s}(\xi, \lambda_j, s) = -\frac{\bar{Q}_{0,j,s}(\lambda_j, s)}{\varphi(\sigma_1, \sigma_2)} \quad , \quad (8.49)$$

$$\cdot \left[(a_1 - 1)k_0(\sigma_1)k_0(\sigma_2, \xi) - (a_2 - 1)k_0(\sigma_2)k_0(\sigma_1, \xi) \right];$$

где

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2(a_2 + \varepsilon)(a_1 - 1)k_0(\sigma_1)k_1(\sigma_2) - \sigma_1(a_1 + \varepsilon)(a_2 - 1)k_0(\sigma_2)k_1(\sigma_1)$$

Ввиду сложности выражений (8.46)-(8.49), обратный переход от изображения к оригиналу относительно преобразования Лапласа осуществляется численно по формуле (8.9). Далее осуществляется обратное преобразование по формуле:

$$U_n(\xi, \bar{z}, \tau) = \frac{U_{n,0}}{H} + \frac{2}{H} \sum_{j=1}^{\infty} U_{n,j}(\xi, \lambda_j, \tau) \text{Cos} \lambda_j z, \quad n=1,2 \quad (8.50)$$

С учетом (8.50), осредняя функции $U_n(\xi, \bar{z}, \tau)$ по вскрываемой скважиной части пласта, имеем:

$$U_n(\xi_c, \tau) = \frac{1}{H} U_{n,0}(\xi_c, \tau) + \frac{2}{H} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{Sin} \lambda_j L}{\lambda_j} U_{n,j}(\xi_c, \lambda_j, \tau), \quad n=1,2 \quad (8.51)$$

С помощью ЭВМ при $Q_i(\tau) = Q = \text{const}$ по формулам (8.48)-(8.51) для фильтрационных сопротивлений, т.е. для функции

$$\psi_n(\xi, z, \tau) = -\frac{2\pi HR_c^2 P_0 U}{\mu Q_v}$$

проведены расчеты при следующих исходных данных:
 $r=(0,1;1;10;20)\text{м}$; $L=(1;3;5;7;9;10)\text{м}$; $H=(10;20;30;40;50)\text{м}$
 $t=(600;3600;14400;43200;86400;432000)\text{сек}$; $\mu_0 = 13 \cdot 10^{-3} \text{ Па с}$;
 $k_{01}=10^{-13} \text{ м}^2$; $k_{02}=10^{-16} \text{ м}^2$; $\beta_1 = 0,2039 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$;
 $\beta_2 = 0,2039 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$; $P_0 = 294,3 \text{ Па}$; $R_c = 0,1 \text{ м}$.

Для сравнения также рассчитывались фильтрационные сопротивления несовершенной скважины, работающей в гранулярной среде.

Полученные результаты в виде кривых представлены на рис.8.13-8.17. На рис.8.13 для системы трещин построены кривые, характеризующие зависимость коэффициента совершенства (отношение фильтрационных сопротивлений несовершенной и совершенной скважин) от расстояний при различных значениях мощности. Из анализа кривых видно, что несовершенство скважин существенно влияет на их фильтрационные сопротивления. Довольно резкий рост коэффициента совершенства наблюдается при малых значениях степени вскрытия. С увеличением расстояния ее влияние ослабевает и на расстоянии порядка 20м почти исчезает.

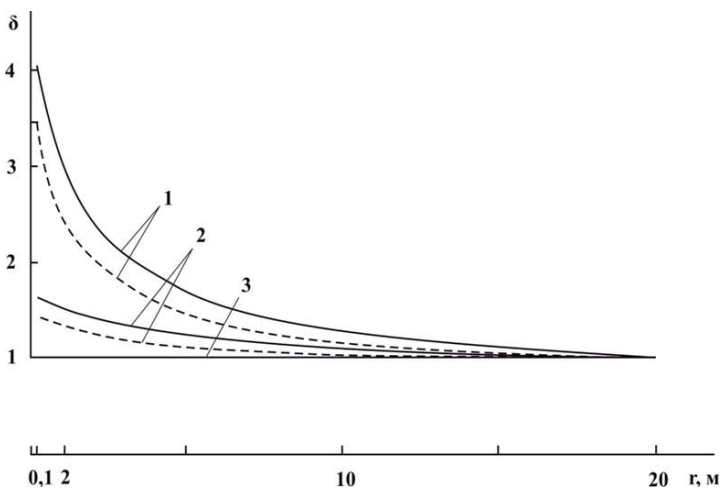


Рис. 8.13. Изменение коэффициента совершенства в зависимости от r для $t = 600$ сек; $H = 10$ м при различных значениях L : 1 - $L = 1$ м, 2 - $L = 3$ м; 3 - $L = 5$ м, — — соответствуют трещиновато-пористой, -- гранулярной среде

Сравнение кривых для гранулярной и трещиновато-пористой сред показывает, что в трещиновато-пористых коллекторах гидродинамическое не совершенство скважин оказывает более сильное влияние на величину фильтрационного сопротивления.

С уменьшением степени вскрытия и расстояний превышение фильтрационного сопротивления в трещиновато-пористой среде над величиной фильтрационного сопротивления для гранулярной среды возрастает.

Так, например, когда $L=1\text{м}$ и r меняется от 1м до 20м , разница между значениями составляет 25%, а с увеличением L эта разница сильно уменьшается.

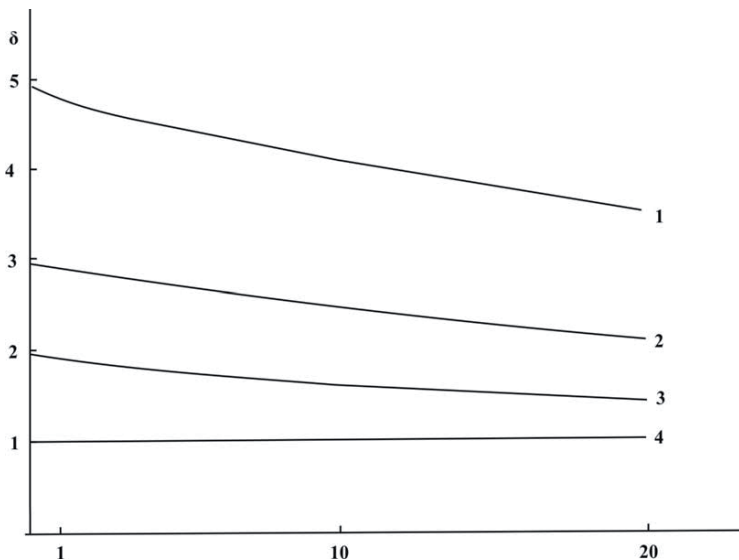


Рис. 8.14. Зависимость коэффициента совершенства от координаты r для различных значений мощности при $L = 5\text{м}$, $t = 600\text{сек}$:

1 – $H = 50\text{м}$; 2 – $H = 30\text{м}$; 3 – $H = 20\text{м}$; 4 – $H = 10\text{м}$

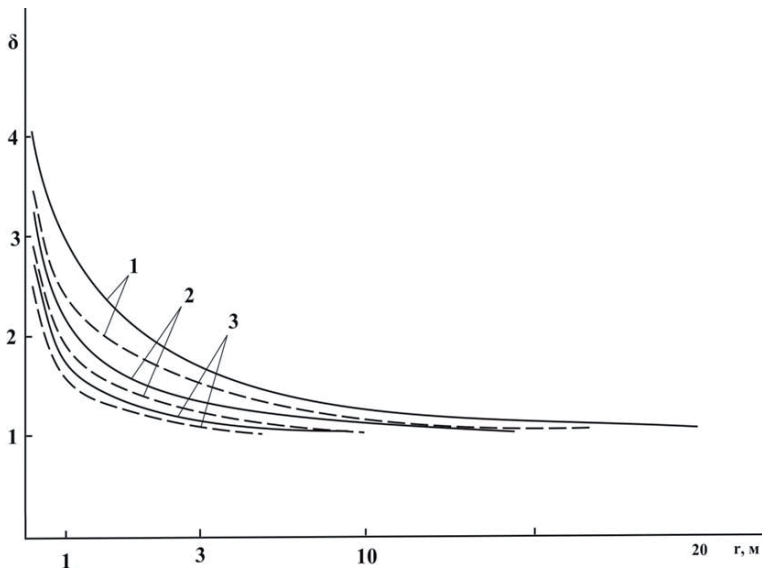


Рис. 8.15. Зависимость коэффициента совершенства от координаты r для $L = 1\text{ м}$, при различных значениях времени:

1 - $t = 600$ сек; 2 - $t = 3600$ сек; 2 - $t = 3600$ сек $H = 30\text{ м}$;

3 - $t = 86400$ сек

--соответствуют трещиновато-пористой, --гранулярной среде

На рис.8.14 представлена зависимость коэффициента δ от мощности пласта и расстояний при фиксированных значениях L и t для системы трещин, а на рис.8.15 зависимость коэффициента δ от расстояний для различных значений времени.

Как видно из графиков на рис.8.13-8.14 довольно резкое возрастание коэффициента δ наблюдается при малых значениях расстояний и времени. Увеличение расстояния и времени приводит к уменьшению величины δ .

С течением времени разность коэффициентов δ для трещиновато-пористой и гранулярной сред резко уменьшается. Это означает, что дальнейший процесс фильтрации в трещиновато-пористом пласте будет осуществляться за счет объема жидкости, находящейся в системе блоков среды.

На рис.8.16 приведены результаты расчетов величины δ в зависимости от относительного вскрытия пласта для различных моментов времени, вычисленных по формуле (8.51). Из графика видно, что в областях малых степеней совершенства скважин увеличение величины δ более значительно, чем в областях больших степеней совершенства.

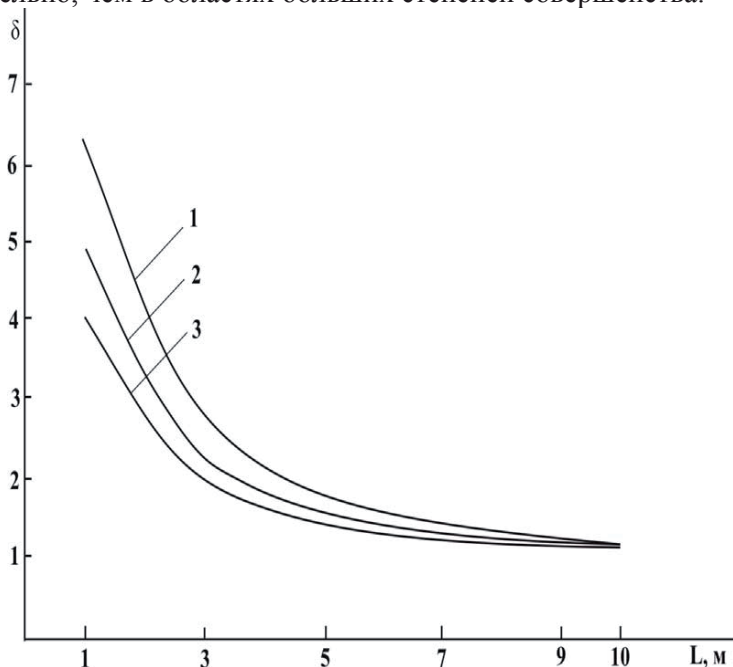


Рис. 8.16. Зависимость коэффициента совершенства от степени вскрытия для различных значений времени при $r=R_c$:
 1 - $t = 600$ сек; 2 - $t = 3600$ сек; 3 - $t = 86400$ сек

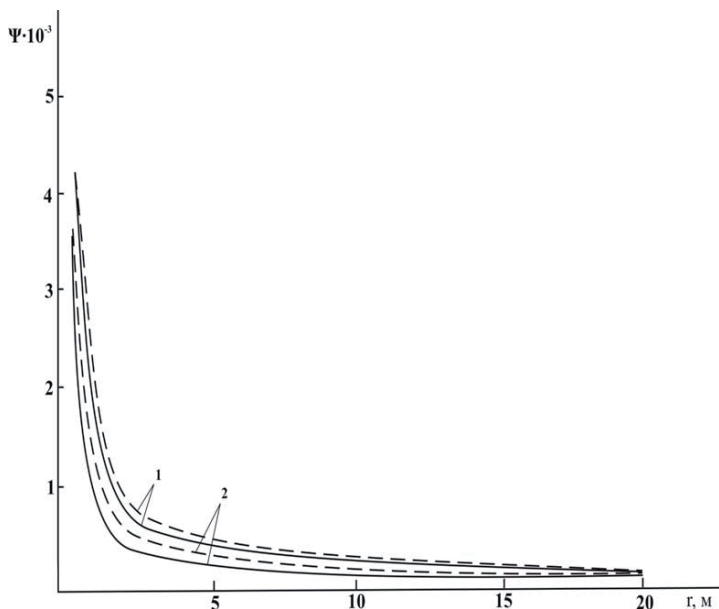


Рис. 8.17. Зависимость фильтрационных сопротивлений от расстояний для $L=1\text{м}$ при различных значениях времени:

1 - $t = 600$ сек; 2 - $t = 86400$ сек

Пунктирные линии соответствуют системе трещин,
сплошные – системе блоков.

На рис.8.17 приведены кривые зависимости от времени и расстояний значений функций Ψ_n . Из кривых видно, что чем меньше время, тем значительнее разница фильтрационных сопротивлений между системами блоков и трещин.

8.5 Аналитическое решение задачи о нестационарной плоско радиальной фильтрации реального газа

Предположим, что круговая трещиновато-пористая газовая залежь мощностью b эксплуатируется одной центральной скважиной с дебитом $Q(t)$. Требуется определить поле давления пласта в любой момент времени. В этом случае с учетом уравнения состояния реального газа

$$\rho(P_n) = \frac{P_n \rho_{am}}{z(P_n) P_{am}}, \quad n = 1, 2 \quad (8.52)$$

решается следующая начально-краевая задача

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{m_n(P_n) P_n}{z(P_n)} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{k_n(P_n) P_n}{\mu(P_n) z(P_n)} \frac{\partial P_n}{\partial r} \right] + (-1)^n \frac{P_{am}}{\rho_{am}} q = 0; \quad n = 1, 2 \\ P_1(r, t) \Big|_{r=0; r \rightarrow \infty} = P_2(r, t) \Big|_{r=0; r \rightarrow \infty} = P_0 \\ P_1(r, t) \Big|_{r=R_c} = P_2(r, t) \Big|_{r=R_c} \\ r \left(\frac{k_1(P_1) P_1}{\mu(P_1) z(P_1)} \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{k_2(P_2) P_2}{\mu(P_2) z(P_2)} \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_c} = \frac{Q_{vr}(t) P_{am}}{2\pi b} \end{aligned} \right\}, \quad (8.53)$$

где

$$Q_v(t) = \frac{Q(t)}{\rho_{am}}$$

При предположении $m_n(P_n) = m_{on}(const)$, с учетом (8.40) задача (8.53) заменяется следующей линейной задачей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \frac{k_{on}}{\mu_o} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{p}_n}{\partial r} \right) = \frac{m_{on} \mu_o}{P_o k_{on}} \frac{\partial \bar{p}_n}{\partial t} + \frac{(-1)^n}{\lambda_2 \mu_o} (\bar{p}_2 - \bar{p}_1), \\ \bar{p}_1(r, t) \Big|_{r=0; r \rightarrow \infty} = \bar{p}_2(r, t) \Big|_{r=0; r \rightarrow \infty} = 0, \\ \bar{p}_1(r, t) \Big|_{r=R_c} = \bar{p}_2(r, t) \Big|_{r=R_c}, \\ r \left(\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_c} = \bar{Q}_{or}(t), \end{aligned} \right\}, \quad (8.54)$$

где $\bar{p}_o = \frac{P_o}{z(P_o) P_{am}}$; $\bar{Q}_{or}(t) = \frac{Q_{v,r}(t) \mu_o \lambda_1}{2\pi b k_{o1} P_o}$; $\bar{p}_k(r, t) \equiv \frac{\bar{p}(P_n) - \bar{p}_o}{\rho_{am}}$,

λ_m – определяются из (8.40) с учетом (8.52) при $P_n=P_{1n}$ и $P_n=P_{2n}$.

Решение этой задачи в случае $Q_{v,t}(t)=Q_{v,t}=\text{const}$ полностью совпадает с решением (8.9) с той лишь разницей, что в этом случае выражение безразмерных коэффициентов $\nu_1, \varepsilon, \beta, \tau$ будет иметь вид:

$$\nu_1 = \frac{\alpha R_c^2 \lambda_1}{k_{01} \lambda_2}; \quad \varepsilon = \frac{k_{02} \lambda_1}{k_{01} \lambda_2}; \quad \beta = \frac{k_{01} m_{02} \lambda_1}{k_{02} m_{01} \lambda_2}; \quad \tau = \frac{k_{02} P_o t}{\mu_o m_{02} R_c^2 \lambda_2};$$

а функции $\bar{\psi}_{n,s}(\xi, s)$, $U_n(\xi, \tau)$ соответственно надо заменить функциями

$$-\frac{\bar{\mu} r^2}{Q_{or}} \bar{\rho}_{n,s}(\xi, s), \quad \bar{\rho}_n(\xi, \tau)$$

Если принять, что параметры пласта и газа зависят от давления по степенному закону (8.37), связь между давлением и функцией выражается следующей формулой:

$$P_n(r, t) = P_o \left[1 + \frac{a_k - a_{\mu+1}}{\lambda_n} \ln \frac{\bar{\rho}_n(r, t)}{\bar{\rho}_o} \right]^{\frac{1}{a_k - a_{\mu+1}}} \quad (8.55)$$

Далее, рассмотренная задача аналогично решается и в случае замкнуто-упругого режима.

Рассмотренные задачи в этом параграфе решены также с применением метода конечных разностей и теоремы сравнения и приведены в работе [3].

По формулам (8.9), (8.55) и алгоритмам, приведенным в [13] составлены программы, которые реализованы на ЭВМ. Результаты расчетов, проведенных при следующих исходных данных: $P_o=58,86$ МПа; $Q_{v,t}=50$ м³/с; $P_{\min}=0,101373$ МПа; $P_{1n}=P_{2n}=44,145$ МПа; $m_{01}=0,015$; $m_{02}=0,15$; $R_c=0,1$ м, представлены в таблицах 8.5-8.8.

В табл.8.5 приведены результаты расчетов для безразмерного забойного давления, вычисленные по теореме сравнения. Как видно из табл.8.5, скорость

сходимости метода теоремы сравнения очень высока и при расчетах можно ограничиться вторым приближением. При этом $\max_t |\Delta^{(2)}| \leq 0,06\%$.

Таблица 8.5

Результаты расчетов по теореме сравнения
в случае фильтрации реального газа в ГПП

t сек	Теорема сравнения				$\Delta^{(1)}$ %	$\Delta^{(2)}$ %
	I приближение		II приближение			
	Н	В	Н	В		
$6 \cdot 10^3$	0,933499	0,977234	0,933699	0,934096	4,68	0,04
$66 \cdot 10^3$	0,922436	0,969416	0,922709	0,923149	5,09	0,05
$126 \cdot 10^3$	0,919422	0,968271	0,919708	0,920167	5,31	0,05
$186 \cdot 10^3$	0,917600	0,967709	0,917892	0,918365	5,46	0,05
$246 \cdot 10^3$	0,916291	0,967298	0,916587	0,917070	5,57	0,05
$306 \cdot 10^3$	0,915266	0,966944	0,915566	0,916056	5,64	0,05
$366 \cdot 10^3$	0,914424	0,966621	0,914728	0,915224	5,71	0,05
$426 \cdot 10^3$	0,913710	0,966320	0,914017	0,914515	5,76	0,05
$486 \cdot 10^3$	0,913089	0,966033	0,913400	0,913903	5,80	0,05
$546 \cdot 10^3$	0,912540	0,965761	0,912853	0,913460	5,83	0,06
$606 \cdot 10^3$	0,912049	0,965500	0,912364	0,912873	5,86	0,06

Н-нижняя оценка, В-верхняя оценка

$$\Delta^{(1)} = \frac{|\bar{P}_{n,H}^{(1)} - \bar{P}_{n,B}^{(1)}|}{\bar{P}_{n,H}^{(1)}} 100\% , \quad \Delta^{(2)} = \frac{|\bar{P}_{n,H}^{(2)} - \bar{P}_{n,B}^{(2)}|}{\bar{P}_{n,H}^{(2)}} 100\% , \quad n = 1,2$$

Таблица 8.6 составлена для количественной оценки способа линеаризации, где приведены значения безразмерного забойного давления от времени, вычисленные методами теоремы сравнения, конечных разностей и способом

линеаризации. Полученные результаты свидетельствуют о применимости способа линеаризации с высокой точностью, при этом максимальная относительная погрешность между результатами, полученными способом линеаризации и методами теоремы сравнения и конечных разностей соответственно будет 0,03% и 0,62%.

Таблица 8.6

Результаты расчетов по оценке точности способа линеаризации в случае фильтрации реального газа в ТПП

t сек	\bar{P}_n			Δ_1 %	Δ_2 %	Δ_3 %
	I Теорема сравне- ния	II Линеари- зация	III МКР			
$6 \cdot 10^3$	0,933897	0,934145	0,940108	0,03	0,64	0,62
$66 \cdot 10^3$	0,922928	0,923058	0,927412	0,01	0,47	0,48
$126 \cdot 10^3$	0,919937	0,920038	0,92448	0,01	0,48	0,49
$186 \cdot 10^3$	0,918128	0,918212	0,922733	0,01	0,49	0,50
$246 \cdot 10^3$	0,916828	0,916899	0,921483	0,007	0,50	0,51
$306 \cdot 10^3$	0,91581	0,915873	0,920508	0,007	0,51	0,51
$366 \cdot 10^3$	0,914975	0,915029	0,91971	0,006	0,51	0,51
$426 \cdot 10^3$	0,914265	0,914313	0,919033	0,005	0,52	0,52
$486 \cdot 10^3$	0,913652	0,913691	0,918447	0,004	0,52	0,52
$546 \cdot 10^3$	0,913107	0,913140	0,917927	0,004	0,52	0,52
$606 \cdot 10^3$	0,912618	0,912649	0,917567	0,003	0,53	0,53

$$\Delta_1 = \frac{|\bar{P}^I - \bar{P}^{II}|}{\bar{P}^{II}} 100\%; \quad \Delta_2 = \frac{|\bar{P}^{III} - \bar{P}^{II}|}{\bar{P}^{II}} 100\%; \quad \Delta_3 = \frac{|\bar{P}^I - \bar{P}^{III}|}{\bar{P}^{III}} 100\%; \quad \bar{P}_n^{\text{cp}} = \frac{\bar{P}_{n,H}^{(2)} + \bar{P}_{n,B}^{(2)}}{2}$$

В таблицах 8.7 и 8.8 для изучения влияния нелинейных эффектов, проявляемых при изменении параметров пласта и газа от давления, приведены результаты расчетов для безразмерного забойного давления от времени, полученные методом конечных разностей при упруговодонапорном и замкнуто-упругом режимах. Из таблицы 8.7 можно сделать вывод о том, что при упруговодонапорном режиме можно не учитывать реальные свойства породы и газа, и при гидродинамических расчетах процесса разработки деформируемых трещиновато-пористых газовых месторождений можно использовать формулы для идеального газа в недеформируемых пластах. В случае же замкнуто-упругого режима неучет изменения физических параметров газа и пласта от давления может привести к значительным ошибкам при подсчетах забойного давления. Так, например, максимальная относительная погрешность между значениями безразмерного забойного давления с учетом и без учета реальных свойств газа в рассматриваемом примере составляет около 9%.

Таблица 2.7

Влияние реальных свойств в случае фильтрации газа в ТПП при упруговодонапорном режиме

t	\bar{P}_n											
	I		II		III		IV		V		VI	
	$a_k=1,5; a_{\mu}=0,6$ $a_z=0,6; a_m=0,1$	Δl %	$a_k=1,5; a_{\mu}=0$ $a_z=0; a_m=0$	Δl %	$a_k=0; a_{\mu}=0,6$ $a_z=0; a_m=0$	Δl %	$a_k=0; a_{\mu}=0$ $a_z=0,6; a_m=0$	Δl %	$a_k=0; a_{\mu}=0$ $a_z=0; a_m=0,1$	Δl %	$a_k=0; a_{\mu}=0$ $a_z=0; a_m=0$	Δl %
$6 \cdot 10^3$	0,94013	0,37	0,94096	0,28	0,94457	0,10	0,94087	0,29	0,94400	0,04	0,94360	0,04
$6 \cdot 10^4$	0,92971	0,25	0,92815	0,42	0,93344	0,15	0,93173	0,03	0,93235	0,03	0,93204	0,03
$12 \cdot 10^4$	0,92922	0,12	0,92626	0,44	0,93185	0,16	0,93149	0,12	0,93050	0,01	0,93037	0,01
$18 \cdot 10^4$	0,92920	0,10	0,92589	0,45	0,93155	0,16	0,93148	0,15	0,93010	0,004	0,930066	0,004
$24 \cdot 10^4$	0,92920	0,09	0,92582	0,45	0,93150	0,16	0,93148	0,16	0,93001	0,001	0,93000	0,001
$30 \cdot 10^4$	0,92920	0,08	0,92581	0,45	0,93148	0,16	0,93148	0,16	0,92999	0	0,92999	0
$36 \cdot 10^4$	0,92920	0,08	0,92581	0,45	0,93148	0,16	0,93148	0,16	0,92998	0	0,92998	0
$42 \cdot 10^4$	0,92920	0,08	0,92581	0,45	0,93148	0,16	0,93148	0,16	0,92998	0	0,92998	0
$48 \cdot 10^4$	0,92920	0,08	0,92581	0,45	0,93148	0,16	0,93148	0,16	0,92998	0	0,92998	0
$54 \cdot 10^4$	0,92920	0,08	0,92581	0,45	0,93148	0,16	0,93148	0,16	0,92998	0	0,92998	0
$60 \cdot 10^4$	0,92920	0,08	0,92581	0,45	0,93148	0,16	0,93148	0,16	0,92998	0	0,92998	0

Таблица 2.8

Влияние реальных свойств в случае фильтрации реального газа в ТПП при замкнуто-упругом режиме

t сек	\bar{P}_n																	
	I		II		III		IV		V		VI							
	ΔI $a_k=1,5; a_{\mu}=0,6$ $a_z=0,6; a_m=0,1$	ΔI $a_k=1,5; a_{\mu}=0$ $a_z=0; a_m=0$	ΔI $a_k=0; a_{\mu}=0,6$ $a_z=0; a_m=0$	ΔI $a_k=0; a_{\mu}=0$ $a_z=0,6; a_m=0$	ΔI $a_k=0; a_{\mu}=0,6$ $a_z=0; a_m=0$	ΔI $a_k=0; a_{\mu}=0$ $a_z=0,6; a_m=0$	ΔI $a_k=0; a_{\mu}=0$ $a_z=0,6; a_m=0$	ΔI $a_k=0; a_{\mu}=0$ $a_z=0,6; a_m=0$	ΔI $a_k=0; a_{\mu}=0$ $a_z=0,6; a_m=0$	ΔI $a_k=0; a_{\mu}=0$ $a_z=0,6; a_m=0$	ΔI $a_k=0; a_{\mu}=0$ $a_z=0,6; a_m=0$	ΔI $a_k=0; a_{\mu}=0$ $a_z=0,6; a_m=0$						
$6 \cdot 10^3$	0,94011	0,37	0,94096	0,27	0,94456	0,10	0,94082	0,29	0,94400	0,04	0,94360							
$6 \cdot 10^4$	0,92410	0,70	0,92699	0,39	0,93243	0,20	0,92383	0,73	0,93157	0,06	0,93099							
$12 \cdot 10^4$	0,91202	1,40	0,92022	0,51	0,92663	0,18	0,90973	1,64	0,92602	0,12	0,92495							
$18 \cdot 10^4$	0,89998	2,07	0,91354	0,59	0,92092	0,21	0,89574	2,53	0,92061	0,17	0,91900							
$24 \cdot 10^4$	0,88798	2,74	0,90684	0,67	0,91522	0,24	0,88186	3,41	0,91519	0,23	0,91304							
$30 \cdot 10^4$	0,87602	3,42	0,90010	0,77	0,90951	0,27	0,86808	4,30	0,90976	0,29	0,90709							
$36 \cdot 10^4$	0,86289	4,24	0,89334	0,86	0,90380	0,30	0,85442	5,18	0,90433	0,36	0,90112							
$42 \cdot 10^4$	0,85219	4,80	0,88654	0,96	0,89809	0,33	0,84087	6,06	0,89889	0,42	0,89516							
$48 \cdot 10^4$	0,84032	5,49	0,87971	1,06	0,89238	0,36	0,82743	6,94	0,89344	0,48	0,88918							
$54 \cdot 10^4$	0,82849	6,19	0,87281	1,17	0,88666	0,39	0,81409	7,82	0,88799	0,54	0,88320							
$60 \cdot 10^4$	0,81668	6,90	0,86596	1,30	0,88095	0,42	0,80086	8,70	0,88252	0,60	0,87722							

8.6. Влияние степени вскрытия трещиноватопористых коллекторов на дебит газовых скважин

Вопросы фильтрации жидкости к несовершенной по степени вскрытия скважине в трещиновато-пористых средах в различных постановках исследовались многими авторами. Для газовых месторождений аналогичные исследования отсутствуют. Это объясняется значительной сложностью моделирования фильтрационных течений, сопровождающихся обменными процессами и трудностями математического порядка. Поэтому, разработка приближенных эффективных численно-аналитических методов решения нелинейных систем дифференциальных уравнений движения реального газа не только представляет определенный интерес, но зачастую является единственной возможностью воспроизведения картины фильтрационного процесса.

Задачу о притоке реального газа к несовершенной скважине, вскрывшей конечный трещиноватопористый пласт, рассмотрим в общей постановке, т.е. при любых соотношениях проницаемости и упругоэластичности систем трещин и блоков. Пласт мощностью H и радиусом R_k ограничен двумя непроницаемыми поверхностями и вскрыт скважиной радиусом R_c на глубине $L < H$ (рис. 8.12).

Задача определения функции давления математически формулируется следующим образом [37]: найти функцию $P_n(r, z, t)$, удовлетворяющую в данной области $D = \{R_c < r < R_k, 0 < z < H\}$ системе уравнений

$$\operatorname{div} \left[\frac{k_n(P_n) \rho(P_n)}{\mu(P_n)} \operatorname{grad} P_n \right] + (-1)^n q = m_{on} \frac{\partial \rho(P_n)}{\partial t}; \quad n = \overline{1, 2} \quad (8.56)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} P_n(r, z, t)|_{l=0} &= P_o; & P_n(r, z, t)|_{r=R_k} &= P_o; \\ P_1(r, z, t)|_{r=R_c} &= P_2(r, z, t)|_{r=R_c} \\ \frac{\partial P_n}{\partial z} \Big|_{z=0, k} &= 0 \\ r \left(\frac{k_1(P_1)\rho(P_1)}{\mu(P_1)} \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{k_2(P_2)\rho(P_2)}{\mu(P_2)} \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_c} &= \begin{cases} \frac{Q(t)}{2\pi L}; & z \in [0, L] \\ 0; & z \in [L, H] \end{cases} \end{aligned} \right\}, \quad (8.57)$$

где q – определяется из формулы (8.41).

С учетом уравнения состояния реального газа (8.52) для решения указанной задачи, следуя предыдущим параграфам, будем использовать способ линеаризации, который позволяет в значительной мере упростить решение системы уравнений (8.56) и получить его в сравнительно простой аналитической форме без существенного ухудшения точности результата.

После применения способа линеаризации нелинейная задача (8.56), (8.57) переходит к следующей линейной задаче:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 \bar{\rho}_n}{\partial z^2} &= \beta^{2-n} \frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial \tau} + (-1)^n v_n (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1), \quad n=1,2 \\ \bar{\rho}_n(\xi, \bar{z}, \tau)|_{\tau=0} &= \bar{\rho}_0; & \bar{\rho}_n(\xi, \bar{z}, \tau)|_{\xi=\bar{R}_k} &= \bar{\rho}_0 \\ \bar{\rho}_1(\xi, \bar{z}, \tau)|_{\xi=1} &= \bar{\rho}_2(\xi, \bar{z}, \tau)|_{\xi=1}; \\ \xi \left(\frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=1} &= \begin{cases} Q_{ог}(\tau); & \bar{z} \in [o, \bar{L}] \\ 0; & \bar{z} \in [\bar{L}, \bar{H}] \end{cases} \end{aligned} \right\}, \quad (8.58)$$

где $\tau = \frac{k_{02}t}{\mu_o m_{02} \lambda_2 R_c^2}$; $v_1 = \frac{\alpha R_c^2}{k_{o1}} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$; $v_2 = \frac{\alpha R_c^2}{k_{02}}$; $Q_{ог}(\tau) = \frac{Q(\tau) \mu_o \lambda_1}{2\pi L k_{o1} \rho_{ам}}$;

$$\bar{\rho}_n \equiv \bar{\rho}(P_n) - \bar{\rho}_o = \frac{\rho(P_n)}{\rho_{ам}} - \bar{\rho}_o; \quad \varepsilon = \frac{k_{02} \lambda_1}{k_{o1} \lambda_2}$$

Как в параграфе 8.3, применяя конечное косинус пре-

образование Фурье по переменной \bar{z} и преобразование Лапласа по τ и осуществляя обратные переходы, найдем решение задачи в виде (8.50), (8.51). При этом в этих формулах функции $U_n(\xi, \bar{z}, \tau)$ и $U_n(\xi_c, \tau)$ соответственно заменяются функциями $\bar{\rho}_n(\xi, \bar{z}, \tau)$ и $\bar{\rho}_n(\xi_c, \tau)$, а безразмерные параметры $\tau, \varepsilon, \bar{Q}_o(\tau), \beta, V_1$ - соответственно

$$\tau = \frac{k_{o2}t}{\mu_o m_{o2} \lambda_2 R_c^2}; \quad \varepsilon = \frac{k_{o2} \lambda_1}{k_{o1} \lambda_2}; \quad Q_{OR}(\tau) = \frac{Q(\tau) \mu_o \lambda_1}{2\pi L k_{o1} \rho_{am}};$$

$$\beta = \frac{k_{o1} m_{o2} \lambda_2}{k_{o2} m_{o1} \lambda_1}; \quad V_1 = \frac{\alpha R_c^2 \lambda_1}{k_{o1} \lambda_2}$$

С учетом изменения параметров пласта и газа от давления по степенному закону (8.37), переход от функции $\bar{\rho}_n(\xi, \bar{z}, \tau)$ к функции $P_n(\xi, \bar{z}, \tau)$ осуществлялся по следующей формуле

$$\bar{P}_n(\xi, z, \tau) = \frac{P_n(\xi, \bar{z}, \tau)}{P_0} = \left\{ \frac{a_k - a_\mu + 1}{\lambda_n} \ln \frac{\bar{\rho}_n(\xi, \bar{z}, \tau)}{\bar{\rho}_0} + 1 \right\}^{\frac{1}{a_k - a_\mu + 1}},$$

где

$$\lambda_n = \frac{\ln \left[\frac{P_0 z(P_1)}{P_1 z(P_0)} \right]^{a_k - a_\mu + 1}}{P_0 \left[1 - (\bar{P}_1)^{a_k - a_\mu + 1} \right]}$$

В качестве примера с помощью ЭВМ при $Q(t)=const$ проведены расчеты для фильтрационных сопротивлений

$$\psi_n(\xi, \bar{z}, \tau) = \frac{2\pi HR_c^2 \Delta P_n}{\mu_o Q_v}$$

По результатам расчетов построены кривые на рис.8.18-8.20. На рис.8.18 для системы трещин приведен график изменения коэффициента совершенства $\delta = \frac{\psi_{n.нес.}}{\psi_{n.сов.}}$ при различных t . Как видно из графика, коэффициент совершен-

ства с увеличением времени и расстояния уменьшается.

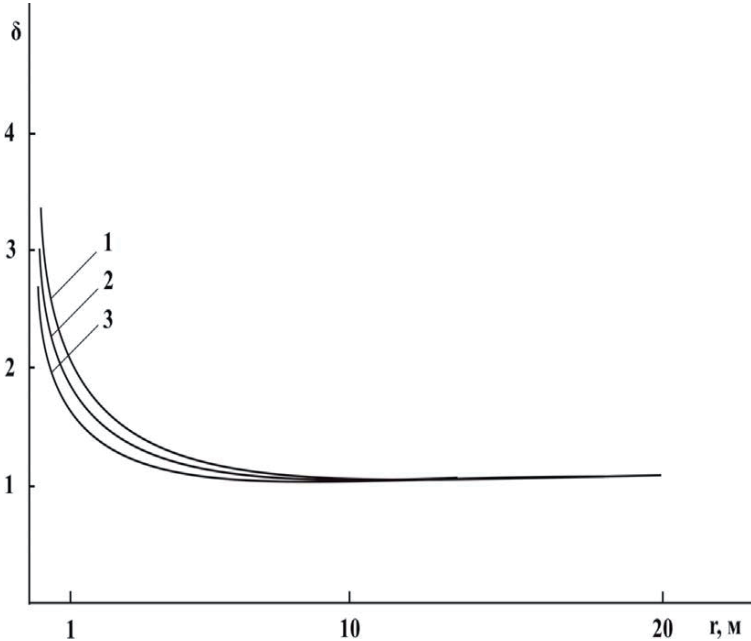


Рис.8.18. График зависимости коэффициента δ от координаты r для $L=1\text{м}$ при различных значениях времени: 1 - $t = 600$ сек; 2 - $t = 3600$ сек; 3 - $t = 86400$ сек.

На рис.8.19 изображена зависимость коэффициента δ , вычисленная при осредненных по вскрываемой скважиной части пласта значениях фильтрационных сопротивлений для трещиновато-пористой и гранулярной сред от L . Анализ этих кривых показывает, что при малых значениях L для одного и того же значения t коэффициент совершенства δ для трещиновато-пористого пласта выше, чем для гранулярного. При малых значениях времени разница между этими кривыми еще значительнее.

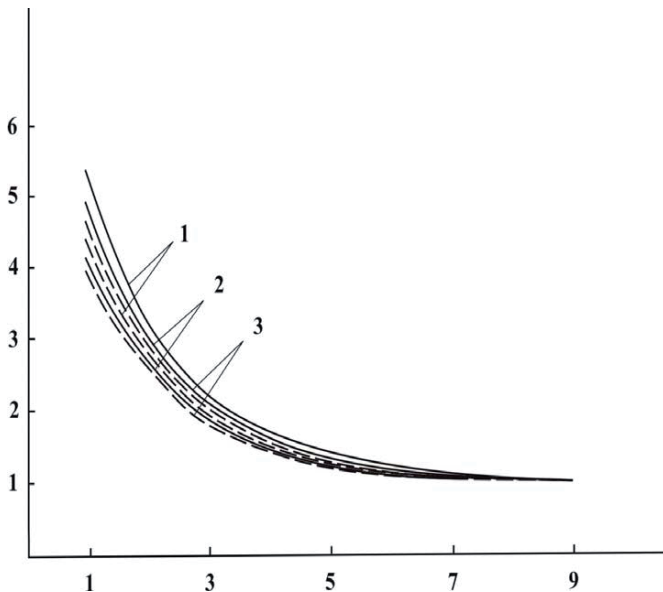


Рис.8.19. График зависимости коэффициента δ от степени вскрытия L на забое скважины при различных значениях времени:

1 - $t = 600$ сек; 2 - $t = 3600$ сек; 3 - $t = 86400$ сек.

Сплошные линии соответствуют случаю трещиноватопористой среды, пунктирные – гранулярной среде.

На рис.8.20 приведена зависимость относительной погрешности, получаемой при неучете реальных свойств газа, от величины L для различных моментов времени. Наиболее существенная погрешность при наших исходных данных для любого момента времени $t > 0$ наблюдается при малых значениях величины L .

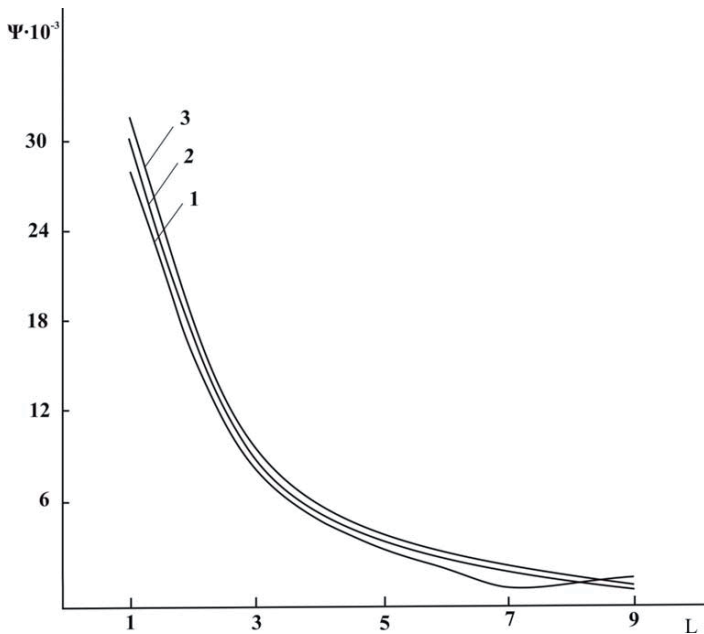


Рис.8.20. График зависимости погрешности между перепадами давлений в случае идеального и реального газа от степени вскрытия для различных значений времени при $r = R_c$:

1 - $t = 14400$ сек; 2 - $t = 86400$ сек; 3 - $t = 432000$ сек.

8.7. О некоторых точных решениях задач нестационарной фильтрации жидкости в среде с двойной пористостью

В работах [3,20 и др.] были сформулированы основные задачи фильтрации в средах с двойной пористостью и указаны методы их решения. При этом основное внимание было уделено нестационарным процессам фильтрации упругой жидкости к скважине (галерее) с заданным дебитом. Однако, при заданном забойном давлении решение этих задач в общей постановке, насколько известно, до сих пор не получено.

Исследование таких вопросов представляет особый интерес при решении обратных задач фильтрации, при интерпретации результатов исследования скважин, прослеживании изменения дебита во времени и т.д.

В связи с этим в данной работе предлагаются точные решения ряда задач о притоке упругой жидкости к скважине (галерее), пущенной в эксплуатацию с заданным забойным давлением в ограниченном полосообразном и круговом трещиновато-пористом пласте (ТПП) при любых соотношениях проницаемостей системы трещин и блоков.

8.7.1. Приток жидкости к галерее в ограниченном полосообразном ТПП

Предположим, что конечный полосообразный ТПП эксплуатируется совершенной по характеру и степени вскрытия прямолинейной галереей. До пуска галереи в эксплуатацию пласт находится в невозмущенном состоянии с давлением P_0 . В некоторый момент времени ($t > 0$) давление на стенке галереи снижается мгновенно от P_0 до P_c , и поддерживается постоянным в течение всего процесса разработки.

Таким образом, задача определения поля давлений состоит в решении системы уравнений:

$$\frac{\partial^2 \Phi_j^*}{\partial \xi^2} - (-1)^j v_j (\Phi_2^* - \Phi_1^*) = \beta^{j-1} \frac{\partial \Phi_j^*}{\partial \tau}; \quad j = \overline{1,2} \quad (8.59)$$

при следующих условиях:

$$\Phi_j^* \Big|_{\xi=0} = 0; \quad \Phi_j^* \Big|_{\xi=1} = 1 - \overline{P}_c; \quad \Phi_j^* \Big|_{\tau=0} = 1 - \overline{P}_c; \quad j = \overline{1,2}, \quad (8.60)$$

где

$$\xi = \frac{\chi}{L}; \quad \Phi_j^* = \overline{P}_j - \overline{P}_c; \quad \overline{P}_j = \frac{P_j}{P_o}; \quad \tau = \frac{k_1 t}{\mu \beta_1^* L^2}; \quad v_j = \frac{\alpha L^2}{k_j}; \quad \beta = \frac{k_1 \beta_2^*}{k_2 \beta_1^*};$$

L – характерная длина пласта; индексы 1 и 2 относятся соответственно к системам трещин и блоков среды.

Остальные обозначения общепринятые.

Решение этой задачи, полученное методом конечных интегральных преобразований, имеет вид:

$$\Phi_1^*(\xi, \tau) = (1 - \overline{P}_c) \xi + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \exp \varepsilon_{1n} \tau + B_n \exp \varepsilon_{2n} \tau) \text{Sin} \lambda_n \xi, \quad (8.61)$$

$$\Phi_2^*(\xi, \tau) = (1 - \overline{P}_c) \xi + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n a_{2n} \exp \varepsilon_{1n} \tau + B_n b_{2n} \exp \varepsilon_{2n} \tau) \text{Sin} \lambda_n \xi, \quad (8.62)$$

где $\varepsilon_{1n} = 0,5(-a_{1n} + \sqrt{a_{1n}^2 - 4b_{1n}})$; $\varepsilon_{2n} = -0,5(a_{1n} + \sqrt{a_{1n}^2 - 4b_{1n}})$;

$$a_{1n} = v_1 + \lambda_n^2 + \frac{(v_2 + \lambda_n^2)}{\beta}; \quad b_{1n} = \frac{\lambda_n^2}{\beta} (v_1 + v_2 + \lambda_n^2);$$

$$a_{2n} = 1 + \frac{\varepsilon_{1n} + \lambda_n^2}{v_1}; \quad b_{2n} = 1 + \frac{\varepsilon_{2n} + \lambda_n^2}{v_1}; \quad \lambda_n = \pi n;$$

$$A_n = \frac{2(1 - \overline{P}_c)}{\lambda_n} \left(1 - \frac{\varepsilon_{1n} + \lambda_n^2}{\sqrt{a_{1n}^2 - 4b_{1n}}} \right); \quad B_n = \frac{2(1 - \overline{P}_c)(\varepsilon_{1n} + \lambda_n^2)}{\lambda_n \sqrt{a_{1n}^2 - 4b_{1n}}};$$

Пользуясь формулами (8.61), (8.62) можно определить величину понижения давления соответственно в системах

трещин и блоков в любом сечении пласта и при любых значениях времени t .

Общий дебит галереи, состоящий из жидкости, поступающей из системы трещин и блоков, определяется из выражения:

$$Q = \frac{SPk_1}{\mu L} \left(\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \xi} \right) \Bigg|_{\xi=0}; \quad (8.63)$$

Подставив значения функции $\Phi_1^*(\xi, \tau)$ и $\Phi_2^*(\xi, \tau)$ из (8.61), (8.62) в (8.63), получим

$$Q = \frac{s\Delta P k_1}{\mu L} \left\{ (1 + \varepsilon) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [(1 + \varepsilon a_{2n}) \exp \varepsilon_{1n} \tau + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_{1n} + \lambda_n^2}{\sqrt{a_{1n}^2 - 4b_{1n}}} ((1 + \varepsilon b_{2n}) \exp \varepsilon_{2n} \tau - (1 + \varepsilon a_{2n}) \exp \varepsilon_{1n} \tau) \right\} \quad (8.64)$$

Количество жидкости, перетекающей из систем блоков в систему трещин в каждый момент времени определяется формулой

$$W(t) = \frac{\alpha s L P_o}{\mu} \int_0^1 [\Phi_2^*(\xi, \tau) - \Phi_1^*(\xi, \tau)] d\xi = - \frac{4\alpha s L \Delta P}{\mu v_1} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{(\varepsilon_{1n} + \lambda_n^2)}{\lambda_n^2} \cdot \\ \left\{ \frac{\varepsilon_{2n} + \lambda_n^2}{\sqrt{a_{1n}^2 - 4b_{1n}}} \exp \varepsilon_{2n} \tau + \left(1 - \frac{\varepsilon_{1n} + \lambda_n^2}{\sqrt{a_{1n}^2 - 4b_{1n}}} \right) \exp \varepsilon_{1n} \tau \right\} \quad (8.65)$$

Отметим, что задача (8.59), (8.60) имеет установившееся продолжение и при $t \rightarrow \infty$ из (8.61)-(8.65) получим решение соответствующей стационарной задачи:

$$\Phi_1^*(\xi) = \Phi_2^*(\xi) = (1 - \bar{P}_c) \xi, \quad (8.66)$$

$$Q = \frac{S\Delta P k_1}{\mu L} (1 + \varepsilon), \quad W = 0 \quad (8.67)$$

В случае замкнуто-упругого режима условие на внешнем контуре заменяется условием

$$\left. \frac{d\Phi_j^*}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad (8.68)$$

Решая задачу аналогично предыдущему случаю, для определения функции $\Phi_j^*(\xi, \tau)$ получим:

$$\Phi_j^*(\xi, \tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{jn}^*(\tau) \text{Sin} \delta_n \xi, \quad (8.69)$$

$$\Phi_{1n}^* = \frac{1 - \bar{P}_c}{\delta_n} \exp \mu_{1n} \tau + C_n (\exp \mu_{2n} \tau - \exp \mu_{1n} \tau), \quad (8.70)$$

$$\Phi_{2n}^* = \frac{1 - \bar{P}_c}{\delta_n} \frac{v_1 + \mu_{1n} + \delta_n^2}{v_1} \exp \mu_{1n} \tau + C_n \left(\frac{v_1 + \mu_{2n} + \delta_n^2}{v_1} \exp \mu_{2n} \tau - \frac{v_1 + \mu_{2n} + \delta_n^2}{v_1} \exp \mu_{1n} \tau \right), \quad (8.71)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{(2m+1)\pi}{2}; \quad \mu_{1n} = 0,5 \left(-m_{1n} + \sqrt{m_{1n}^2 - 4m_{2n}} \right), \\ \mu_{2n} &= -0,5 \left(m_{1n} + \sqrt{m_{1n}^2 - 4m_{2n}} \right) \\ C_n &= \frac{(1 - \bar{P}_c)(\mu_{1n} + \delta_n^2)}{\delta_n(\mu_{1n} - \mu_{2n})}; \quad m_{1n} = (v_1 + \delta_n^2) + \frac{v_2 + \delta_n^2}{\beta}; \\ m_{2n} &= \frac{\delta_n^2}{\beta} (v_1 + v_2 + \delta_n^2) \end{aligned}$$

Дебит галереи и количество жидкости, перетекающей из систем блоков в систему трещин, соответственно будет определяться по формулам:

$$Q(\tau) = \frac{2s\Delta P k_1}{\mu L} \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi_{1n}^o(\tau) + \varepsilon \Phi_{2n}^o(\tau)], \quad (8.72)$$

$$W(\tau) = \frac{2s\alpha\Delta PL}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_n^2} [\Phi_{2n}^o(\tau) - \Phi_{1n}^o(\tau)], \quad (8.73)$$

где $\Phi_{1n}^o(\tau) = \exp \mu_{2n} \tau + \frac{\mu_{1n} + \delta_n^2}{\mu_{1n} - \mu_{2n}} (\exp \mu_{1n} \tau - \exp \mu_{2n} \tau),$

$$\Phi_{2n}^o(\tau) = \left(1 + \frac{\mu_{1n} + \delta_n^2}{\nu_1}\right) \exp \mu_{1n} \tau + \frac{\mu_{1n} + \delta_n^2}{\mu_{1n} - \mu_{2n}} \left[\left(1 + \frac{\mu_{2n} + \delta_n^2}{\nu_2}\right) \exp \mu_{2n} \tau - \left(1 + \frac{\mu_{1n} + \delta_n^2}{\nu_1}\right) \exp \mu_{1n} \tau \right]$$

8.7.2. Нестационарный приток жидкости к скважине конечного радиуса

Предполагается, что трещиновато-пористый пласт разрабатывается центральной скважиной, на забое которой поддерживается постоянное давление, равное P_c .

Требуется определить распределение пластового давления, а также дебит скважины и количество перетекающей жидкости из системы блоков в систему трещин в произвольный момент времени после пуска скважины в эксплуатацию. Тогда математическая формулировка рассматриваемой задачи может быть представлена в следующем виде:

Найти функции $F_j(R, T)$, удовлетворяющие в данной области $D\{1 \leq R \leq R_k, 0 \leq T < \infty\}$ следующей системе дифференциальных уравнений, граничным и начальным условиям:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial F_j}{\partial R} \right) - (-1)^j \eta_j (F_2 - F_1) = \beta^{j-1} \frac{\partial F_j}{\partial T} \\ & F_j|_{T=0} = -\Delta P_c; \quad F_j|_{R=1} = 0; \quad \frac{\partial F_j}{\partial R} \Big|_{R=R_k} = 0; \quad j=1, 2 \end{aligned} \right\}, \quad (8.74)$$

где

$$R = \frac{r}{R_c}; \quad T = \frac{k_1 t}{\beta_1^* \mu R_c^2}; \quad \beta = \frac{k_1 \beta_2^*}{k_2 \beta_1^*}; \quad \eta_1 = \frac{\alpha R_c^2}{k_1}; \quad \eta_2 = \frac{\alpha R_c^2}{k_2}$$

$$\bar{R}_k = \frac{R_k}{R_c}; \quad F_j(R, T) = \Delta P_j - \Delta P_c; \quad \Delta P_j = P_0 - P_j(R, T);$$

R_k, R_c – соответственно радиусы внешнего контура и скважины.

Для решения задачи (8.74) применено конечное интегральное преобразование Ханкеля вида [32,84]:

$$H[F_j(\Psi_n, T)] = \int_1^{\bar{R}_k} R V_0(\Psi_n, R) F_j(R, T) dR, \quad (8.75)$$

где $V_0(\Psi_n, R)$ – есть ядро преобразования, и имеет вид:

$$V_0(\Psi_n, R) = J_0(\Psi_n, R) Y_0(\Psi_n) - J_0(\Psi_n) Y_0(\Psi_n, R), \quad (8.76)$$

Ψ_n – корни характеристического уравнения:

$$J_1(\Psi_n \bar{R}_k) Y_0(\Psi_n) - J_0(\Psi_n) Y_1(\Psi_n, \bar{R}_k) = 0, \quad (8.77)$$

$J_i(z), Y_i(z)$ – функции Бесселя 1-го и 2-го рода, i -го порядка.

Искомые функции $F_j(R, T)$ определены в виде [34]:

$$F_j(R, T) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n^2 (J_1^2(\varphi_n, \bar{R}_k) V_0(\Psi_n, R))}{J_0^2(\Psi_n) - J_1^2(\Psi_n, \bar{R}_k)} H[F_j(\Psi_n, T)], \quad (8.78)$$

где $H[F_1(\Psi_n, T)] = C_{1n} \exp \Theta_{1n} T + C_{2n} \exp \Theta_{2n} T$;

$$H[F_2(\Psi_n, T)] = \left(1 + \frac{\Psi_n^2}{\eta} \right) H[F_1(\Psi_n, T)] +$$

$$+ \frac{C_{1n} \Theta_{1n}}{\eta_1} \exp \Theta_{1n} T + \frac{C_{2n} \Theta_{2n}}{\eta_2} \exp \Theta_{2n} T$$

$$C_{1n} = \frac{2 \Delta P_c (\Theta_{2n} + \Psi_n^2)}{\pi \Psi_n^2 (\Theta_{2n} - \Theta_{1n})}; \quad C_{2n} = \frac{2 \Delta P_c (\Theta_{1n} + \Psi_n^2)}{\pi \Psi_n^2 (\Theta_{2n} - \Theta_{1n})};$$

$$\Theta_{1n} = 0,5 \left(-m_{1n}^* + \sqrt{m_{1n}^{*2} - 4m_{2n}^*} \right); \quad \Theta_{2n} = -0,5 \left(m_{1n}^* + \sqrt{m_{1n}^{*2} - 4m_{2n}^*} \right)$$

$$m_{1n}^* = (\eta_1 + \Psi_n^2) + \frac{1}{\beta} (\eta_2 + \Psi_n^2); \quad m_{2n}^* = \frac{\Psi_n^2}{\beta} (\eta_1 + \eta_2 + \Psi_n^2)$$

Дебит скважины и количество жидкости, которое поступает из системы блоков в систему трещин, соответственно определяются из выражений:

$$Q = -\frac{4\pi k_1 b \Delta P_c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\Psi_n \bar{R}_k) \Omega_n(T)}{\Psi_n [J_0^2(\Psi_n) - J_1^2(\Psi_n \bar{R}_k)]}; \quad (8.79)$$

$$W(T) = \frac{2\pi^2 b s \alpha R_c^2}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\Psi_n \bar{R}_k) \{H[F_2(\Psi_n, T)] - H[F_1(\Psi_n, T)]\}}{J_0^2(\Psi_n) - J_1^2(\Psi_n \bar{R}_k)}; \quad (8.80)$$

где

$$\Omega_n(T) = \frac{1}{\eta_1 (\Theta_{2n} - \Theta_{1n})} \{ (\Theta_{2n} + \Psi_n^2) [\eta + \varepsilon (\eta_1 + \Psi_n^2) + \Theta_{1n}] \exp \Theta_{1n} T - (\Theta_{1n} + \Psi_n^2) [\eta_1 + \varepsilon (\eta_1 + \Psi_n^2) + \Theta_{2n}] \exp \Theta_{2n} T \}$$

Аналогичным образом можно получить решение задачи для случая упруговодонапорного режима.

С целью количественной оценки влияния значений фильтрационных и емкостных параметров на гидродинамические характеристики, по формулам (8.64), (8.65), были выполнены расчеты при следующих исходных данных:

$$L=3 \cdot 10^3 \text{ м}, \mu=13 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, \alpha=0,76 \cdot 10^{-14}, \beta^*_2=2,04 \cdot 10^{-10} \text{ 1/Па},$$

$$\Delta P=49 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$k_1=10^{-13} \div 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2, k_2=10^{-16} \div 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2, s=10 \text{ м}^2, t=10^4 \div 10^8 \text{ сек.}$$

Сравнение столбцов таблиц 8.9 и 8.10, а также рис.8.21 и 8.22 показывает весьма существенное влияние значения проницаемостей k_1 и k_2 на изменение дебита галереи и величину перетока жидкости.

Уменьшение значения проницаемости в системе трещин естественно приводит к уменьшению дебита галереи. Резкое уменьшение дебита наблюдается при малых значениях времени.

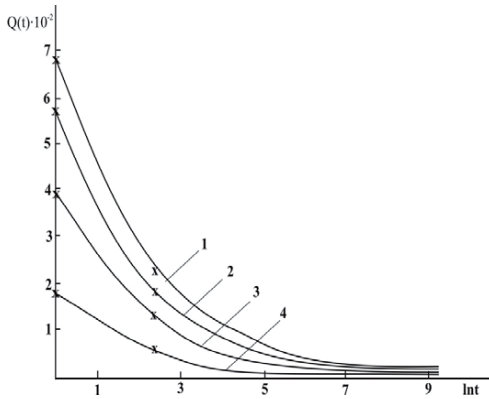


Рис. 8.21. Зависимость дебита галереи от безразмерного времени при $\beta_1 = 3,06 \cdot 10^{-12} \text{ 1/Па}$

1 – $K_1 = 10^{-13} \text{ М}^2$ $K_2 = 5 \cdot 10^{-16} \text{ М}^2$ 2 – $K_1 = 10^{-13} \text{ М}^2$ $K_2 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ М}^2$
 3 – $K_1 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ М}^2$ $K_2 = 5 \cdot 10^{-16} \text{ М}^2$ 4 – $K_1 = 10^{-14} \text{ М}^2$ $K_2 = 10^{-16} \text{ М}^2$

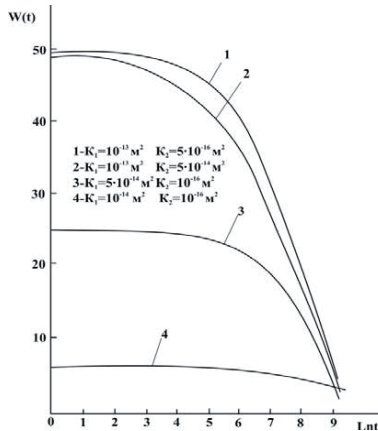


Рис.8.22. Зависимость интегрального перетока жидкости между системами трещин и блоков от безразмерного времени при $\beta_1 = 3,06 \cdot 10^{-12} \text{ 1/Па}$

При одних и тех же значениях остальных параметров, чем больше значение параметра k_1 , тем скорее наступает квазистационарный режим работы галереи, и дебит ее определяется по формуле (8.66).

Анализ формулы (8.65) для определения величины интегрального перетока жидкости из систем блоков в трещины и полученные по ней числовые результаты (табл.8.10, рис.8.22) показывают, что переток в значительной мере зависит от параметров пласта и со временем уменьшается.

В таблицах приведены также результаты расчетов для функций $Q(t)$ и $W(t)$ в зависимости от упругоэластичности системы трещин β_1 для различных моментов времени. Для всех вариантов в начальный момент времени β_1 существенно влияет на значение указанных параметров. С увеличением времени влияние β_1 пренебрежимо уменьшается.

Таблица 8.9

Величина дебита галереи $Q(t)$ в зависимости от параметра пласта (см³/сек)

t сек	$k_1=10^{-13} \text{ м}^2$ $k_2=10^{-15} \text{ м}^2$ $\beta_1=3,06 \cdot 10^{-12}$ 1/Па	$k_1=5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$ $k_2=5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$ $\beta_1=3,06 \cdot 10^{-12}$ 1/Па	$k_1=5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$ $k_2=5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$ $\beta_1=1,53 \cdot 10^{-11}$ 1/Па	$k_1=5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$ $k_2=5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$ $\beta_1=1,06 \cdot 10^{-10}$ 1/Па	$k_1=5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$ $k_2=10^{-15} \text{ м}^2$ $\beta_1=3,06 \cdot 10^{-12}$ 1/Па
10^4	566	398	410	483	401
10^5	182	127	131	154	128
10^6	62	42	44	51	42,6
10^7	24	15	16	18	15,7
10^8	13	7,20	7,2	8	7,2

Таблица 8.10

Величина интегрального перетока в зависимости от параметра пласта (см³/сек)

t сек	$k_1=10^{-13} \text{ м}^2$	$k_1=5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$	$k_1=5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$	$k_1=5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$	$k_1=5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$
	$k_2=10^{-15} \text{ м}^2$	$k_2=5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$	$k_2=5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$	$k_2=5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$	$k_2=10^{-15} \text{ м}^2$
	$\beta_1=3,06 \cdot 10^{-12}$	$\beta_1=3,06 \cdot 10^{-12}$	$\beta_1=1,53 \cdot 10^{-11}$	$\beta_1=1,06 \cdot 10^{-10}$	$\beta_1=3,06 \cdot 10^{-12}$
	1/Па	1/Па	1/Па	1/Па	1/Па
10 ⁴	49,5	25,00	23,0	16,5	24,70
10 ⁵	48,5	25,50	23,0	16,5	24,65
10 ⁶	47,5	24,50	23,0	16,5	24,25
10 ⁷	33,0	20,00	19,0	14,5	20,10
10 ⁸	8,0	3,15	3,3	4,0	3,05

В заключении отметим, что полученные в работе точные решения для полной системы дифференциальных уравнений движения жидкости в ГПП могут быть использованы для анализа характерных особенностей фильтрационных процессов в таких средах, а также в качестве тестов для проверки правильности различных приближенных постановок и решений.

Отметим, что влияние нелинейно-упругих свойств породы и жидкости на характер притока и в этом случае легко учитывается с помощью способа линеаризации, приведенного в параграфе 8.6.

8.8. Расчет продвижения подошвенной воды в газовую залежь в трещиновато-пористой среде

Известно, что задачи с подвижной границей относятся к числу наиболее сложных в подземной газогидродинамике. Не составляет исключения и классическая задача вытеснения газа водой при упруговодонапорном режиме, различные

варианты, решения которой известны из [73]. Подавляющее большинство полученных решений описывают плоскую задачу вытеснения газа водой. Однако часто встречаются залежи природного газа, находящиеся в контакте с подошвенной водой. В этом случае поле течения воды имеет гидродинамически более сложный характер. Поэтому получили развитие различные подходы приближенного моделирования отмеченного процесса. При этом, как правило, исследуется горизонтальное течение воды в водоносной области, а формирующаяся во времени, на некоторой условной границе, производительность этого потока переводится в вертикальный подъем газовой воды. Отмеченная условная граница вытекает из заложенного в постановку рассматриваемой задачи понятия укрупненной скважины. В качестве последней служит вертикальное сечение пласта вдоль схематизированной по форме внешней границы газовой залежи. Вертикальный подъем газовой воды в пределах данного подхода считается не сопровождающимся деформацией, что позволяет использовать простые соотношения материального баланса для приведения в соответствие притока к укрупненной скважине и изменения газонасыщенного объема пласта. С другой стороны, отсутствие деформации газовой воды предполагает равномерное дренирование газовой залежи системой газовых добывающих скважин.

В отмеченных предпосылках в [57] приведены методы определения показателей разработки водонапорного режима залежей природного газа в условиях водонапорного режима. Указанные результаты получены для условий гранулярных или чисто трещиноватых коллекторов.

Ниже покажем, что отмеченные решения могут быть обобщены и для условий трещиновато-пористых коллекторов.

Полагаем, что разность плотностей газа и воды в опре-

деленных условиях может быть достаточной для сохранения формы газодляного контакта в виде, позволяющем его простую схематизацию по аналогии с отмеченными решениями в гранулярных или чисто трещиноватых коллекторах.

Также как в работе [57], в качестве укрупненной скважины принимается воображаемая галерея радиусом R_c равная радиусу первоначальной внешней границы газовой залежи.

Процесс формирования гидродинамического поля в водяной зоне в области с внешней подвижной границей, описывается краевой задачей (8.74).

Расход воды, вторгшейся через галерею радиусом R_c , определяется выражением (8.79).

Суммарное количество поступившей в газовую залежь воды на момент времени T^o будет определяться формулой

$$Q_e(T^o) = \int_0^{T^o} Q_n(t) dt, \quad (8.81)$$

Подставляя значение $Q_n(T)$ из (8.79) в (8.81), после некоторых преобразований имеем:

$$Q_e(T^o) = -4\pi\Delta P_c \beta_1 R_c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\Psi_n \bar{R}_k) \Omega_n^0(T^o)}{\Psi_n [J_0^2(\Psi_n) - J_1^2(\Psi_n \bar{R}_k)]}, \quad (8.82)$$

где

$$\Omega_n^0(T^o) = \frac{1}{v_1(\Theta_{2n} - \Theta_{1n})} \left\{ \frac{(\Psi_n^2 + \Theta_{2n})}{\Theta_{1n}} [\eta_1 + \varepsilon(\eta_1 + \Psi_n^2) + \Theta_{1n}] \exp \Theta_{1n} T^o - \right. \\ \left. - \frac{(\Psi_n^2 + \Theta_{1n})}{\Theta_{2n}} [\eta_1 + \varepsilon(\eta_1 + \Psi_n^2) + \Theta_{2n}] \exp \Theta_{2n} T^o \right\}; \quad (8.83)$$

Выражение (8.82) показывает изменение общего количества воды вторгшегося через галерею радиуса R_c при

строого определенном давлении P_c на этой границе. Однако давление P_c , принимаемое в пределах настоящей постановки равным давлению на газовой контакте, в процессе эксплуатации залежи постоянным быть не может. Для преодоления отмеченного разногласия применяется метод суперпозиции, позволяющий поинтервальное использование (8.82) для расчета $Q_g(T^o)$. При этом выражение для расчета $Q_g(T^o)$ имеет вид:

$$Q_g(T^o) = -4\pi R_c^2 \beta_1^* b \cdot \left[\Delta P_0 Q_g^0(T^o) + \Delta P_1 Q_g^0(T^o - T_1^o) + \dots + \Delta P_{n-1} Q_g^0(T^o - T_{n-1}^o) \right] \quad (8.84)$$

где
$$Q_g^0(T^o) = \frac{Q_g(T^o)}{4\pi R_c^2 \beta_1^* b} \quad (8.85)$$

Последовательность определения искомых показателей, подробно описанная в [57], вкратце сводится к определению $P_c(T^o)$ с использованием метода последовательных приближений таким образом, чтобы разница в двух последовательных величинах P_c , полученных с учетом уравнения притока (8.82) из уравнения материального баланса для газа, различалась с любой наперед заданной точностью. В качестве первого приближения принимается $P_c(T^o)$, соответствующее газовому режиму. Полученное при этом из (8.82) $Q_g(T^o)$ используем в балансе газа для получения нового $P_c(T^o)$ и т.д. Баланс газа определяется соотношением:

$$\frac{P_c(T^o)}{z(P_c)} = \frac{\alpha_0 \Omega_n P_n (z_n - P_{am} Q_{доб.}(T^o))}{\alpha_0 \Omega_n - Q_g(T^o)}, \quad (8.86)$$

где $\alpha_0 \Omega_n$ – начальный газонасыщенный объем пор залежи; z – коэффициент сверхсжимаемости газа; $P_{am} Q_{доб.}$ – накопленный отбор газа, приведенный к поверхностным условиям.

Так как определение P_c из (8.86) сопряжено с подбором, то проще это сделать графически, заранее построив зависимость $P_c/z(P_c)$ от функции P_c для данной углеводо-

родной системы.

Следует иметь в виду, что в (8.86) средневзвешенное по объему газовой части давление принимается равным его значению на газодляном контакте.

В предположении, что изменение физических параметров от давления происходит по экспоненциальному закону, рассмотренная задача решается приближенно-аналитически с использованием способа линеаризации и получаемое решение легко трансформируется в решение задачи (8.74).

Балансовое уравнение для газа в этом случае принимает вид [57]:

$$\frac{P_c(T^o)}{z(P_c)} \exp\{-\alpha_m [P_n - P(T^o)]\} = \frac{P_n}{z_n} - \frac{P_{am} Q_{доб}(T^o)}{\Omega_n}, \quad (8.87)$$

Определение $P(t)$ из (8.87) осуществляется описанным выше способом.

В заключение отметим, что приведенное решение позволяет определять основные показатели разработки газовой залежи на водонапорном режиме в условиях наличия подошвенной воды.

8.9. Взаимодействие скважин круговой батареи в недеформируемом трещиновато-пористом пласте

В работах [67] с применением метода интегральных соотношений решены некоторые задачи фильтрации в трещиновато-пористых коллекторах. В этих исследованиях за основу была взята полностью вырожденная система уравнений движения жидкости, сведенная к одному уравнению.

В [55] метод интегральных соотношений развивается применительно к решению задач нестационарной фильтрации для случая ограниченной и неограниченной области.

В данной работе, используя результаты работы [55], с

помощью методов интегральных соотношений и суперпозиции полей, решается задача об интерференции круговой батареи эксплуатационных скважин в однородном бесконечном трещиновато-пористом пласте при любых соотношениях проницаемостей и упругоёмкостей системы блоков и трещин.

Дифференциальное уравнение (8.1) перепишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\chi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial r} \right) &= \varepsilon_1 \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial t} - \frac{\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_1}{\tau} \\ \frac{\chi \varepsilon_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial r} \right) &= \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial t} + \frac{\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_1}{\tau} \end{aligned} \right\}, \quad (8.88)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_j &= \frac{2\pi k_1 b R_c (P_o - P_j)}{Q\mu}; \quad \chi = \frac{k_1}{\mu\beta_2}; \quad \varepsilon_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2}; \\ \tau &= \frac{\mu\beta_2}{\alpha}; \quad \varepsilon_2 = \frac{k_2}{k_1}; \quad j = \overline{1,2} \end{aligned}$$

Система уравнений (8.88) решается при следующих граничных и начальных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} r \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial r} + \varepsilon_2 \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial r} \right] &= 1 \\ \bar{\Phi}_1(r, t) \Big|_{r \rightarrow 0} &= \bar{\Phi}_2(r, t) \Big|_{r \rightarrow 0} \\ \bar{\Phi}_1(\infty, t) &= \bar{\Phi}_2(\infty, t) = 0 \\ \bar{\Phi}_1(r, 0) &= \bar{\Phi}_2(r, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.89)$$

Используя метод интегральных соотношений [50], функции $\bar{\Phi}_j(r, t)$ будем искать в виде:

$$\bar{\Phi}_j(r, t) = a_j(t) \ln \frac{r}{R_j(t)} + b_j(t) \left(\frac{r}{R_j(t)} \right)^2 + c_j(t) \quad (8.90)$$

где $a_j(t)$, $b_j(t)$, $c_j(t)$ – неопределенные коэффициенты, подле-

жащие определению; $R_j(t)$ – соответственно длина условной зоны возмущения в системах трещин и блоков, за которыми среда считается невозмущенной.

Согласно методу интегральных соотношений для определения указанных неизвестных коэффициентов дополнительно нужно задавать следующие условия:

$$\left. \frac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial r} \right|_{r=R_j(t)} = 0; \quad \bar{\Phi}_j(r, t) \Big|_{r=R_j(t)} = 0; \quad (8.91)$$

С учетом (8.89) и (8.91) из (8.90) будем иметь:

$$\bar{\Phi}_j(r, t) = \frac{1}{2(1 + \varepsilon_2)} \left[1 + 2 \ln \frac{r}{R_j(t)} - \left(\frac{r}{R_j(t)} \right)^2 \right] \quad (8.92)$$

Для определения функции $R_j(t)$ систему уравнений (8.88) заменим равносильной ей системой вида [22]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial t} - \frac{\bar{\Phi}_2 - \bar{\Phi}_1}{\tau} &= \frac{\chi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial t} &= \frac{\chi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (\bar{\Phi}_1 + \varepsilon_2 \bar{\Phi}_2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.93)$$

Умножая обе части этой системы на $r dr$, интегрируя только в пределах соответствующей зоны, с учетом (8.92) для определения $R_j(t)$ получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{dR_1^2(t)}{dt} - \frac{R_2^2(t) - R_1^2(t)}{\tau} &= 8\chi \\ \varepsilon_1 \frac{dR_1^2(t)}{dt} + \frac{dR_2^2(t)}{dt} &= 8\chi(1 + \varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \quad (8.94)$$

с начальным условием:

$$R_j(t) \Big|_{t=0} = 0$$

Решая систему (8.94) относительно $R_j(t)$, получим:

$$R_1^2(t) = 8\chi \left\{ \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} t + \frac{\tau}{1 + \varepsilon_1} \left[1 - \frac{\varepsilon_1(1 + \varepsilon_2)}{1 + \varepsilon_1} \right] \left(1 - e^{-\frac{1 + \varepsilon_1}{\tau \varepsilon_1} t} \right) \right\} \quad (8.95)$$

$$R_2^2(t) = 8\chi\tau \left\{ \varepsilon_1 \left[\frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} \right) e^{-\frac{1 + \varepsilon_1}{\tau \varepsilon_1} t} \right] - 1 \right\} + R_1^2(t) \quad (8.96)$$

Теперь предположим, что в трещиновато-пористом пласте бесконечно большой протяженности работает одна круговая батарея, состоящая из “ n ” эксплуатационных совершенных скважин с постоянными дебитами. Тогда, пользуясь методом суперпозиции полей, из (8.92) получим выражение для определения давления в любой точке пласта для любого момента времени:

$$P(r, t) = P_o - \frac{Q\mu}{2\pi k_1(1 + \varepsilon_2)bR_c} \sum_{v=1}^n \left[1 + 2\ln \frac{r_v}{R_j(t)} - \left(\frac{r_v}{R_j(t)} \right)^2 \right] \quad (8.97)$$

Как известно из [24]:

$$\sum_{v=1}^n \ln r_v^2 = \ln \left[r^{2n} + R_\delta^{2n} - 2r^n R_\delta^n \text{Cosn}(\theta - \alpha_o) \right] \quad (8.98)$$

$$\sum_{v=1}^n r_v^2 = n(r^2 + R_\delta^2) \quad (8.99)$$

Подставляя (8.98) и (8.99) в (8.97) будем иметь:

$$P_j(r, t) = P_o - \frac{Q\mu_n}{4\pi k_1(1 + \varepsilon_2)b} \left\{ 1 - \frac{r^2 + R_\delta^2}{R_j^2(t)} + \frac{1}{n} \ln \frac{r^{2n} + R_\delta^{2n} - 2r^n R_\delta^n \text{Cosn}(\theta - \alpha_o)}{R_j^{2n}(t)} \right\}, \quad (8.100)$$

где n – число скважин; R_δ – радиус круговой батареи; θ – полярный угол любой точки пласта; α_o – полярный угол скважины.

Принимая $r = R_\delta + R_c$ и $\theta = \alpha_o$, из (8.100) при $j=1$ имеем:

$$\Psi_c(t) = \frac{10^{-8} \bar{\mu}_n R_c^2}{k_1(1 + \varepsilon_2)} \left\{ 0,5 - \left(\frac{R_\delta}{R_c} \right)^2 + \frac{1}{n} \ln \frac{n R_c R_\delta^{n-1}}{R_1^n(t)} \right\}, \quad (8.101)$$

где

$$\Psi_c(t) = \frac{2\pi b \Delta P_k R_c^2}{\mu_o Q}$$

Рассмотрен численный пример: по формулам (8.92), (8.95), (8.96) и [3] при $R_\delta = 5 \cdot 10^2$ м; $\beta_1 = 0,6 \cdot 10^{-10}$ Г/Па; $\beta_2 = 6 \cdot 10^{-10}$ Г/Па; $\alpha = 7,6 \cdot 10^{-15}$; $\bar{\mu} = 13,259$ и при различных значениях k_f , t , r проведены расчеты, результаты которых представлены в таблицах 8.11 и 8.16. Из этих таблиц видно, что уменьшение проницаемости в системе трещин естественно приводит к увеличению фильтрационных сопротивлений и в блоках, и в трещинах.

Резкое падение давления в окрестности скважины особенно наблюдается в начальный момент времени. С течением времени разность фильтрационных сопротивлений резко уменьшается и стремится к нулю.

Из таблицы 8.11 следует, что результаты расчетов, полученных по численно-аналитическому методу и по методу интегральных соотношений очень близки.

После чего можно с приемлемой точностью по формуле (8.101) при различных значениях “ n ” провести расчеты и установить зависимость фильтрационного сопротивления от числа скважин.

Таблица 8.11

Значение фильтрационных сопротивлений при $r=0,1\text{ м}$

k_1 м ²	k_2 м ²	t сек	10^{-3}	
			По численно-аналитическому решению [58]	По методу интегральных соотношений
0,1·10 ⁻¹²	0,000·10 ⁻¹²	597,6	55,80	56,73
		1800	62,19	62,11
		3600	66,75	66,24
		7200	71,35	70,52
		14400	75,97	74,96
		86400	87,87	86,70
		10368000	116,90	118,48
0,05·10 ⁻¹²	- " -	597,6	102,38	104,24
		1800	115,20	114,95
		3600	124,21	123,20
		7200	132,63	131,78
		14400	142,63	140,62
		86400	166,40	164,05
		10368000	224,40	227,50
0,01·10 ⁻¹²	- " -	597,6	404,22	412,58
		1800	467,09	465,33
		3600	511,42	506,04
		7200	556,80	548,39
		14400	602,43	592,21
		86400	720,28	708,21
		10368000	1008,00	1022,02
0,001·10 ⁻¹²	- " -	597,6	2424,59	2140,38
		1800	2984,44	2912,84
		3600	3378,32	3279,08
		7200	3785,94	3662,38
		14400	4199,84	4060,44
		86400	5277,78	5119,68
		10368000	7918,91	7996,27

Таблица 8.12

Значение фильтрационных сопротивлений при $r = 1\text{м}$

k_1 м ²	k_2 м ²	t сек	$\Psi_1 \cdot 10^{-3}$	$\Psi_2 \cdot 10^{-3}$
0,1·10 ⁻¹²	0,000·10 ⁻¹²	597,6	26,81	23,74
		1800	32,04	30,81
		3600	36,07	35,44
		7200	40,29	39,96
		14400	54,58	54,54
		86400	56,32	56,29
		10368000	87,97	87,96
0,05·10 ⁻¹²	- " -	597,6	45,10	39,00
		1800	55,25	52,87
		3600	63,21	61,96
		7200	71,57	70,92
		14400	80,27	79,45
		86400	10,35	10,34
		10368000	16,67	16,67
0,01·10 ⁻¹²	- " -	597,6	130,53	103,40
		1800	177,33	166,04
		3600	215,95	209,00
		7200	255,10	252,07
		14400	323,60	295,80
		86400	411,62	411,35
		10368000	726,42	726,43
0,001·10 ⁻¹²	- " -	597,6	220,67	93,74
		1800	505,76	431,32
		3600	773,03	728,97
		7200	1081,59	1056,94
		14400	1424,20	1410,95
		86400	2401,64	2399,28
		10368000	5226,81	5226,82

8.10. О движении границы раздела нефть-вода в трещиновато-пористых средах

Аналитическое определение положения границы раздела двух жидкостей при движении их в трещиновато-пористой среде (ТПС) является одной из сложных задач подземной гидродинамики. Это связано, прежде всего, с математическими трудностями при совместном решении сложной системы дифференциальных уравнений, описывающих нестационарные фильтрационные течения в таких средах.

Процесс движения границы раздела нефть-вода (ГРНВ) к скважине в месторождениях с трещиновато-пористыми коллекторами при любых соотношениях проницаемостей и упругоэластичности системы трещин и блоков, даже для одножидкостных систем, почти не исследованы.

В настоящей работе приводится приближенное численно-аналитическое решение вышеуказанной задачи и сравнение результатов, полученных по различным моделям ТПС.

Предположим, что в бесконечном круговом горизонтальном однородном, с постоянной мощностью трещиновато-пористом пласте при $t = 0$ работает одна центральная эксплуатационная скважина с постоянным дебитом Q . Начальный контур нефтеносности представляет собой окружность с радиусом R_0 (рис.8.23). Фильтрация жидкости подчиняется закону Дарси, различием вязкостей и коэффициентов сжимаемости нефти и воды пренебрегается. Требуется определить закон движения контура нефтеносности в любой момент времени $t > 0$.

Как известно [3], задача определения положения контура нефтеносности $\Gamma(t)$ состоит в отыскании функции $R_n(t)$, удовлетворяющей уравнению движения

$$m_n \left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=R_n(t)} = V_{nr}, \quad (8.102)$$

и начальному условию

$$R_n(t)|_{t=0} = R_0 \quad (8.103)$$

С учетом закона Дарси и выражения (8.9), уравнение движения ГРНВ принимает вид:

$$\frac{d\eta_n}{d\tau} = \frac{\mu Q_v}{2\pi b R_c^2} \frac{\ln 2}{\tau \beta_{on}} \sum_{i=1}^N V \frac{d\bar{\Psi}_{ns} \left(\xi, \frac{\ln 2}{\tau} i \right)}{d\xi}, \quad (8.104)$$

где

$$\eta_n = \frac{R_n(t)}{R_c}; \quad \beta_{01} = \frac{k_2 m_1}{k_1 \beta_2}; \quad \beta_{02} = \frac{m_2}{\beta_2}$$

На $\eta_n(\tau)$ налагается начальное условие

$$\eta_n(\tau)|_{\tau=0} = \eta_0 = \frac{R_0}{R_c} \quad (8.105)$$

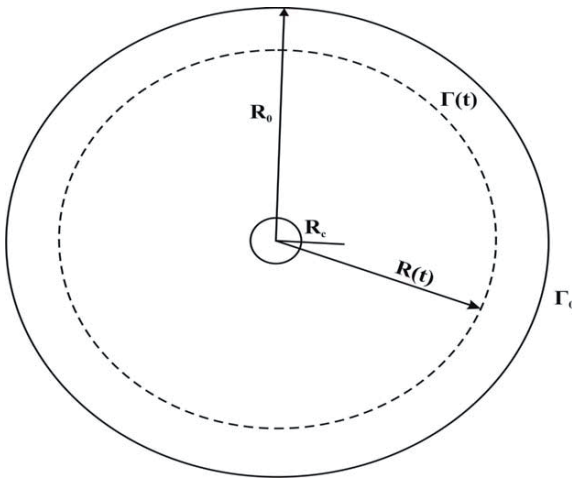


Рис. 8.23. Схематическое изображение плоской радиальной системы вытеснения в ТПП

Численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8.104) при начальном условии (8.105) было получено методом Рунге-Кутты на ЭВМ при следующих исходных данных:

$$\alpha = 0,76 \cdot 10^{-12}; R_c = 0,1 \text{ м}; Q_v = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{сек}; \mu = 1,3007 \cdot 10^{-2} \text{ Нсек/м}^2; b = 10 \text{ м};$$

$$P_o = 2,943 \cdot 10^7 \text{ Па}; R_o = 1000 \text{ м}; \beta_1 = (2,961 \cdot 10^{-12}; 1,480 \cdot 10^{-11}; 0,987 \cdot 10^{-10}; 0) \text{ м}^2/\text{Н};$$

$$\beta_2 = 2,0265 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}; k_1 = (10^{-13}; 8 \cdot 10^{-14}; 5 \cdot 10^{-14}; 10^{-14}) \text{ м}^2;$$

$$k_2 = (10^{-16}; 0,5 \cdot 10^{-15}; 10^{-15}; 0,5 \cdot 10^{-14}; 5 \cdot 10^{-14}; 0) \text{ м}^2; m_1 = 0,0015; m_2 = 0,015.$$

Результаты расчетов представлены в виде графиков на рис.8.24-8.27. Для сопоставления темпов продвижения ГРНВ к скважине приведены графики зависимости $R_n(t)$ от t при различных вариантах изменения физических параметров.

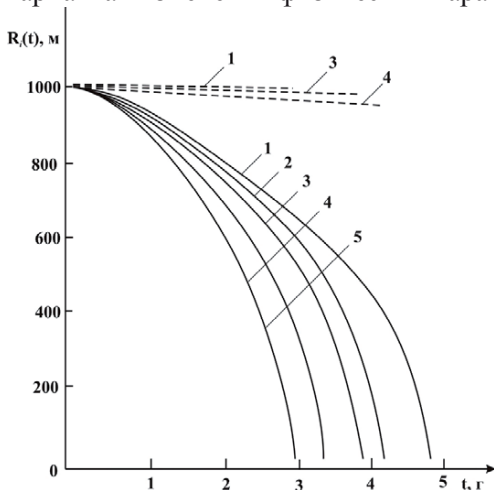


Рис. 8.24. Зависимость положения границы раздела нефть-вода от времени для различных значений параметра \bar{K} при $\beta_1 = 2,961 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$:
 1- $\bar{K} = 200$; 2- $\bar{K} = 100$; 3- $\bar{K} = 20$; 4- $\bar{K} = 10$; 5- $\bar{K} = 2$

Кривые, представленные на рис.8.24 показывают весьма существенное влияние значений отношения проницаемостей k_{01}/k_{02} на время продвижения ГРНВ в системах трещин и блоков. Увеличение значения проницаемости в системе блоков, естественно, приводит к увеличению времени продвижения ГРНВ.

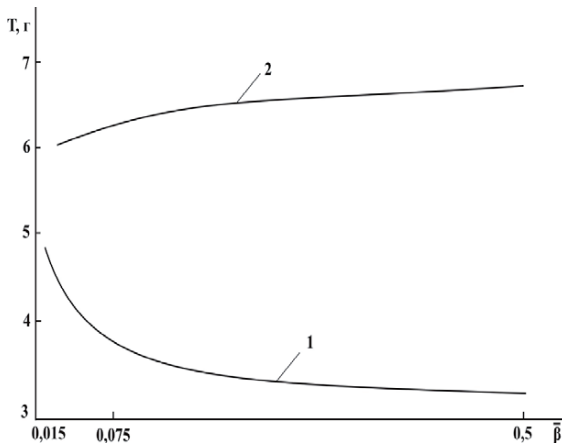


Рис.8.25. Зависимость времени в момент прорыва воды в скважины от параметров ξ_2 и $K=K_1/K_2$:

1 – зависимость T от \bar{K} , 2 – зависимость T от ξ_2

При значении времени, соответствующему $R=R_c$ для системы трещин по графикам рис.8.24 построена кривая зависимости времени прорыва воды к скважине T от k_{01}/k_{02} (рис.8.25). Из этого графика видно, что с улучшением проницаемости системы блоков прорыв воды к скважине вначале происходит с высоким темпом, а потом темп его ослабевает.

На рис.8.26 представлены графики изменения положения ГРНВ в системе трещин при различных соотношениях упругоэластичности систем трещин и блоков.

При фиксированных значениях всех других параметров, изменение упругости систем трещин оказывает значительное влияние на процесс перемещения ГРНВ и прорыв воды в скважины.

Время прорыва воды в скважины тем быстрее, чем меньше значение $\bar{\beta}$ (рис.8.25).

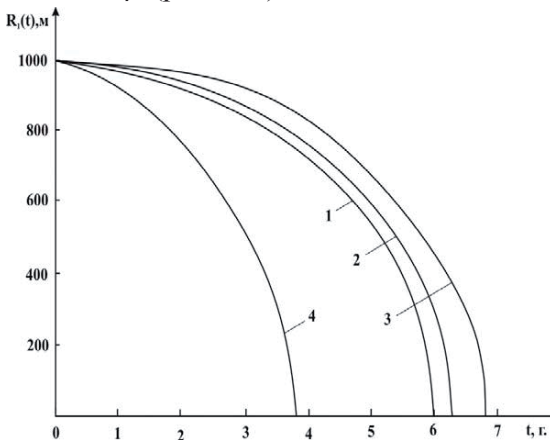


Рис.8.26. Зависимость положения границы раздела нефть-вода от времени для различных значений ξ_2 при $K_2=10^{-15} \text{ м}^2$, $K_1=10^{-14} \text{ м}^2$:
 1- $\xi_2=0,015$; 2- $\xi_2=0,075$; 3- $\xi_2=0,5$; 4- $\xi_2=0$; $K_2=0$

На рис.8.27 показана зависимость положения границы ГРНВ от безразмерного времени для различных моделей ТПС.

Кривые 1,2,3 построены соответственно для усеченной, полуусеченной и полной модели ТПС в зависимости от

$\tau^* = \frac{t_{Tnc}}{t_{nc}}$, где t_{nc} – время продвижения границы в пористой среде с трещинной пористостью.

Из графиков следует, что при прочих равных условиях процесс стягивания ВНК и обводнения скважин в трещино-

вато-пористых средах будет происходить медленнее, чем в пористых средах.

Время прорыва воды к скважине, вычисленное по усеченной, полуусеченной и полной модели ТПС соответственно в 1,25; 1,35 и 2,31 раза больше по сравнению со временем, вычисленным для пористой среды.

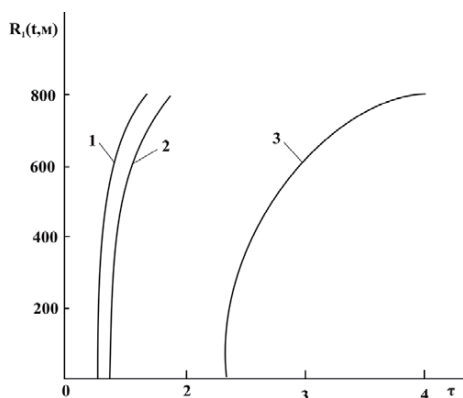


Рис.8.27. Зависимость положения границы раздела нефть-вода от безразмерного времени, вычисленная по различным моделям ТПС

Отсюда можно сделать такой вывод, что при исследовании вопросов перемещения ГРНВ в трещиновато-пористых средах для одножидкостной системы неучет проницаемости системы блоков и упругоэластичности системы трещин может привести к большим погрешностям при определении положения ГРНВ и в итоге сказаться на показателе разработки названных месторождений.

В заключении отметим, что рассмотренная задача с помощью применения способа линеаризации также решена и для деформируемых ТПС, когда физические параметры среды и жидкости зависят от давления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей монографии приводятся теоретические исследования в области моделирования фильтрационных процессов флюидов в залежах, подвергающихся различным напряженно-деформационным состояниям, проведенные авторами в течение нескольких лет.

На основании этих исследований:

- построена математическая модель динамики развития дилатансионно-пластической зоны, вокруг действующей центральной скважины, получены аналитические выражения для гидрогазодинамических параметров пласта и пластового давления, определена интенсивность выноса разрушенной породы в зависимости от механических характеристик пласта и дебита скважины;

- получено автомодельное решение задачи при локализации пластической зоны в окрестностях забоя скважины. На конкретном примере показано, что основными факторами, влияющими на интенсивность выноса песка, являются глубина залегания, уплотненность и состояние поверхности забоя, депрессия в пласте, пластовое давление, ухудшение проницаемости и дебит скважины при нестационарном режиме фильтрации флюидов;

- создана методика для определения гидрогазодинамических параметров пласта и распределение давления в дилатансионно-пластической зоне вокруг действующей скважины при фильтрации жидкости и газа в деформируемых пластах;

- сформулированы и при помощи точных аналитических методов решены задачи о нестационарной фильтрации жидкости к совершенным и несовершенным скважинам в однородных, однородно-анизотропных и кусочно-однород-

ных по проницаемости пластах, коллекторы которых находятся в напряженно-деформационных состояниях различного характера.

Предложен ряд эффективных методов определения фильтрационных параметров и свойств ползучей деформации пласта по данным восстановления забойного давления скважин. Результаты проведенных теоретических исследований позволили:

- впервые установить двухслойный вид кривых восстановления давления скважин, вскрывших пласт с ползучей средой; эти кривые состоят из трех участков: начальный и конечный прямолинейные участки и средний криволинейный переходной участок;

- разработать общую методику интерпретации КВД, позволяющую, кроме традиционных параметров пласта, определять по существу все параметры, характеризующие ползучие свойства пласта.

Проведены комплекс теоретических исследований по совершенствованию методов моделирования разработки глубокозалегающих деформируемых трещиноватых коллекторах месторождений нефти и газа. Изучены основные гидрогазодинамические закономерности сложных пластовых фильтрационных процессов.

Выполнен круг исследований по фильтрации жидкости к системе скважин в зонально-однородных трещиноватых коллекторах с использованием численных методов моделирования. Показана допустимость и обоснован способ замены реологических коэффициентов зон их некоторой средней величиной в широком диапазоне изменения влияющих факторов, обеспечивающие линеаризацию условий сопряжения и возможность использования известных подходов для гранулярных сред при решении задач фильтрации и вытеснения нефти водой в рассматриваемых условиях.

Выполнено обобщение предложенного И.А.Чарным способа линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений для описания фильтрации реальных флюидов в деформируемых трещиноватых средах. Исследована область его применимости и доказана приемлемость такой линеаризации для широкого диапазона изменения перепада давления. Показано, что метод численного обращения преобразования Лапласа в комбинации с предлагаемым методом линеаризации и теоремой сравнения применим для построения решений краевых задач нестационарной фильтрации флюидов в трещиновато-пористых пластах.

Предложены аналитические методы прогнозирования показателей разработки нефтяных и газовых залежей, приуроченных к трещиновато-пористым коллекторам, при работе скважин (галерей) с заданным забойным давлением и любых соотношениях проницаемостей и упругемкостей системы трещин и блоков. Исследованы качественные и количественные характеристики взаимодействия блоков и трещин. Показана возможность использования полученных точных решений в качестве эталонных для проверки различных приближенных методов исследования.

Данная проблема настолько сложна и многогранна, и, несмотря на то, что многие исследователи, в том числе и авторы настоящей монографии, занимались и занимаются ею на протяжении длительного времени, считать ее исчерпанной нельзя.

Большой интерес вызывают в последние годы задачи по адаптации гидродинамических моделей залежей с использованием промысловых данных по скважинам, значительно повышающих точность расчетных прогнозных показателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абасов М.Т., Азимов Э.Х., Кулиев А.М. Гидротермодинамические исследования скважин глубокозалегающих месторождений. Баку: Азербайджанское государственное издательство. 1993, 176 с.
2. Абасов М.Т., Джалалов Г.И., Джалилов К.Н. и др. Газогидродинамикатрещиноватых коллекторов. Баку: Элм, 1988, 292 с.
3. Абасов М.Т., Джалалов Г.И., Мамедов А.М. О методах нестационарных задач фильтрации жидкости в трещиноватопористых коллекторах. // Изв.АН Аз.ССР, сер. Наук о Земле, 1988, № 2, с. 22-34.
4. Абасов М.Т., Джалилов К.Н. Вопросы подземной гидродинамики в разработке нефтяных и газовых месторождений. Баку: Азернешр, 1960, 225 с.
5. Абасов М.Т., Джеваншир Р.Д., Иманов А.А., Джалалов Г.И. О влиянии пластового давления на изменение фильтрационно-емкостных свойств терригенных пород-коллекторов в процессе разработки месторождений нефти и газа // М.: Геология нефти и газа, 1997, № 5, с. 34-39.
6. Абасов М.Т., Иманов А.А., Джалалов Г.И. Деформация глубокозалегающих природных резервуаров залежей нефти и газа при разработке. // М. ВНИИОЭНГ, Геология, геофизика и разработка нефтяных месторождений, 2006, № 4, с. 62-66.
7. Абуталиев Э.Б., Мусаев Р.Т. Неустановившееся движение газов в трещиноватопористых коллекторах. // Сб.Ин-та Кибернетики АН Уз.ССР, сер. Вопросы кибернетики и вычислительной математики, 1968, вып. 17, с. 108-124.
8. Адигимов З.Б. Приближенный метод определения оригинала преобразования Лапласа. Вып. 101, 1972.
9. Акилов Ж.А. О гидродинамическом методе определения релаксационных характеристик неравновесной фильтрации // Докл. АН Уз.ССР.- 1983.- № 4.-с.20-23.
10. Алишаев М.Г. Мирзаджанзаде А.Х. К учету запаздывания в теории фильтрации //Изв. вузов. Нефть и газ. 1975, № 6, с.71-74.

11. Аметов И.М, Басниев К.С Фильтрация жидкости и газа в ползучих средах //Изв. АН СССР, сер. Механика жидкости и газа.-1981.-№ 4.-с. 150-153.
12. Аметов И.М. Фильтрация газированной жидкости при неравновесных условиях // Изв. АН СССР, сер. Механика жидкости и газа.-1980.-№3.-с. 144-148.
13. Аметов И.М. О моделях, учитывающих явления запаздывания при фильтрации жидкости через пористую среду // Изв. Вузов СССР, сер. Нефть и газ.- 1977.-№ 3.-с. 58-60.
14. Атаев Г.Н. Исследование дилатансионно-пластических характеристик зон пласта вокруг работающей скважины и процесса пескопроявления: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Баку, 2000, 121 с.
15. Афанасьев Е.Ф., Николаевский В.Н. Нелокально-упругий режим фильтрации и восстановление давления в глубинных пластах // ПМТФ, 1969, 35, с. 113-116.
16. Афанасьев Е.Ф. К обоснованию теории нелокально-упругого режима фильтрации при помощи уравнений теории упругости // ПМТФ, 1971, № 4, с. 82-86.
17. Афанасьев Е.Ф., Зотов Г.А. Об устойчивости призабойной зоны // Тр. ин-та нефтегаз им.И.М.Губкина. М.: Недра, 1976, вып. 116, с. 96-102.
18. Багир-заде С.Н. Гидродинамические исследования фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористых средах: Дисс. канд. физ. мат. наук. - Баку, 1974, - 130 с.
19. Бан А., Богомолова А.Ф., Максимов В.А. и др. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. М.: Гостоптехиздат, 1962, 275 с.
20. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах.- М.: Недра, 1984, - 211 с.
21. Баренблатт Г.И., Ентов В.М, Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах.-М.: Недра, 1984.-208с.
22. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа.- М.: Недра, 1972, - 288 с.
23. Басниев К.С. и др. Подземная гидродинамика. МоскваИжевск, Институт компьютерных исследований, 2005, 496 с.

24. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.. Численные методы. -М.: Наука, 1987, -600 с.
25. Белов В.В. Вопросы фильтрации жидкости в трещиноватых коллекторах к гидродинамически несовершенным скважинам: Автореф. Дис. канд.техн. наук. - Грозный, 1988, 19 с.
26. Бузинов С.Н., Умрихин И.Д. Исследование нефтяных и газовых скважин и пластов.-М:Нефра, 1984.-269с.
27. Горбунов А.Т. Разработка аномальных нефтяных месторождений. М.: Недра, 1981, 237 с.
28. Горшкова Е.В. Экспериментальные исследования влияния эффективного давления и температуры на свойства пород природных резервуаров. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата геолого-минералогических наук. Баку – 2009. - 24 с.
29. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматиз, 1963, 1100 с.
30. Графутко С.В., Николаевский В.Н. Задача о выносе песка в работающую скважину. М.: Мех. жид. и газа, 1998, №5, с. 130-138.
31. Гринберг Г.А Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. -М: Изд.АН СССР.- 1948.- 728с.
32. Гусейнзаде М.А.. Колосовская А.К. Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах.-М: Недра,1972. 456 с.
33. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования.-М: Наука, 1971.- 288 с.
34. Джалалов Г.И. Гидрогазодинамика разработки нефтяных и газовых залежей в деформируемых коллекторах: Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, 1990, 502 с.
35. Джалалов Г.И., Дунямалыев М.А. Математическое моделирование фильтрации жидкости в средах с различными ядрами ползучести. Научные труды НИПИ «Нефтигаз» SOCAR, 2011, № 3, с. 52-54.
36. Джалалов Г.И., Дунямалыев М.А., Ханбабаева М.Г. Приток жидкости к несовершенной скважине в однородном пласте с

- ползучой средой. Научные труды АТУ, 2010, № 2, с. 67-72.
37. Джалалов Г.И., Мамедов А.М. Приближенно-аналитический метод решения задач нелинейной фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде. // Изв. АН Аз.ССР, сер. Наук о Земле, 1986, № 5, с. 36-46.
 38. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление.-М: Высшаяшкола, 1966.- 408с.
 39. Добрынин В.М. Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти игаза.-М: Недра, 1970.- 239с.
 40. Дунямалыев М.А. О нестационарной фильтрации газа в неоднородных ползучих средах // Изв. АН Азерб. ССР, сер физ.-тех. мат. наук.- 1983.- № 4.-с. 159-160.
 41. Дунямалыев М.А. Нестационарная фильтрация газа в неоднородных круговых ползучих средах // Тр. Ин-та / Азерб. Полит. Ин-т- 1984.- с. 45-51.
 42. Дунямалыев М.А. О фильтрации газа в изолированных пластах с учетом ползучих сред // Изв. Вузов СССР, сер Нефть и газ.- 1984.-№ 12.- с. 34-38.
 43. Дунямалыев М.А. Приток газа к системе несовершенных скважин в неоднородных ползучих средах, разделенных слабопроницаемой перемычкой // Изв. Вузов СССР, сер Нефть и газ.- 1987.- № 12.- с. 38-42.
 44. Дунямалыев М.А. Об одной задаче нестационарной фильтрации газа к несовершенным скважинам в неоднородных ползучих средах при обобщенных ядрах ползучести. Баку. Указ. Деп. Науч. Работ. ВНИТИ № 9 (215), 1989.
 45. Дунямалыев М.А. Нестационарная фильтрация жидкости к системе несовершенных скважин в неоднородных ползучих пластах, разделенных слабопроницаемой перемычкой // Изв. АНАзерб. ССР, Серия Науки о Земле, № 2, 2000.
 46. Дунямалыев М.А. Теория и методы расчета релаксационных процессов при разработке глубокозалегающих нефтяных и газовых месторождений: Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – Баку, 1990, 277 с.
 47. Ержаное Ж.С. Теория ползучести горных пород и ее приложения. –Алма-Ата, Наука. -1964-175с.

48. Желтов Ю.П. Деформация горных пород. М.: Недра, 1966, 198 с.
49. Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: Недра, 1975, 216 с.
50. Завовский А.Ф. О напряженном состоянии насыщенного пласта в окрестности эксплуатационной скважины // Изв. АН СССР, МТТ, 1980, № 3, с. 111-119.
51. Зотов Г.А., Динков А.В., Черных В.А. Эксплуатация скважин в неустойчивых коллекторах.-М: Недра, 1987.- 172с.
52. Исаев Р.Г., Брыков А.А. Некоторые особенности фильтрации в неупругих пористых средах // Изв. Вузов СССР, сер. Нефть и газ.- 1970.-№11. с. 69-73.
53. Исаев Р.Г. К учету наиболее характерных особенностей пласта и флюидов в процессах фильтрации в глубокозалегающих продуктивных пластах с новыми реологическими свойствами // Изв. Вузов СССР. Сер. Нефть и газ.- 1973.- № 1.-с.69-72.
54. Исаев Р.Г. Течение и отдача пластовых флюидов при разработке глубокозалегающих трещиноватых и трещиновато-пористых пластов (основы теории, проекту прилож.): Автореф. дис. докторатехн. наук. – М., 1989. – 33 с.
55. Калиновский Ю.В. Некоторые вопросы фильтрации в истощенных трещиновато-пористых коллекторах. // Тр. МИНХ и ГП им. И.М. Губкина, М., 1978, вып. 136, с. 40-56.
56. Кашников Ю.А., Ахишихин С.Г., Назаров А.Ю. и др. Экспериментальные исследования влияния пластового давления на фильтрационно-емкостные характеристики терригенных коллекторов месторождения Пермского края// Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений, 2007, 3 1, с. 41-50.
57. Коротаев Ю.П., Закиров С.Н. Теория и проектирование разработки газовых и газоконденсатных месторождений.- М.: Недра, 1981, - 294 с.
58. Кошляков Н. С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. - М:Гос. Изд. Физ.-мат. лит. 1962. - 767 с.

59. Кутляров В.С. Об определении параметров трещиновато-пористых пластов по данным нестационарного притока жидкости к скважинам. // Труды ВНИИ, М., 1967, вып. 50, с. 109-116.
60. Кязымов Ш.П., Рамазанов Т.К. Расчет выноса песка из действующей скважины.//Azərbaycan neft-qaz yataqlarının işlənməsi, Elmi əsərlər toplusu, Bakı, 1999, с. 162-170.
61. Майдебор В.Н. Разработка нефтяных месторождений с трещиноватыми коллекторами. - М.: Недра, 1971, - 231 с.
62. Мамедов А.М. Нестационарная фильтрация жидкости и газа в трещиноватых средах при нелинейно-упругом режиме. - Дис. канд. техн. наук. – М., 1987, - 154 с.
63. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Пер. С англ.-М.: Гостехиздат, 1949,- 628с.
64. Мейз Дж.Теория и задачи механики сплошных сред.-М: Мир, 1974.-319с.
65. Мирзаджанзаде А.Х. и др. Фрагменты разработки морских нефтегазовых месторождений. Баку.: Элм, 1997, 408 с.
66. Мирзаджанзаде А.Х., Шахвердиев А.Х. Динамические процессы внефтегазодобыче. М.: Наука, 1997, 254 с.
67. Наказная Л.Г. Фильтрация жидкости и газа в трещиноватых коллекторах. - М.: Недра, 1972, - 184 с.
68. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т. и др. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970, 336 с.
69. Николаевский В.Н. К изучению нелокальных эффектов при упругом режиме фильтрации в глубинных пластах // ПМТФ. - 1968. - № 4. –С. 35-38.
70. Николаевский В.Н., Рамазанов Т.К. Напряженно-деформированное состояние горного массива при нелокально – упругом режиме фильтрации жидкости в пласте // Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 3, с. 138-141.
71. Николаевский В.Н., Рамазанов Т.К. Напряженно-деформированное состояние пласта с учетом фильтрации жидкости // ФТПРПИ, 1982, № 5, с. 37-49.
72. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996, 447 с.

73. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). Под ред. акад. П.Я.Полубариновой-Кочиной. - М.: Наука, 1969, - 546 с.
74. Райченко Л.М. Приток жидкости к скважине в бесконечном и ограниченном трещиновато-пористом пласте. // Диф. ур. с част. произв. - Л., 1989, с. 111-115.
75. Рамазанов Т.К., Гюльмамедов М.Х., Ханбабаева М.Г. Динамика дилатансионно-пластической зоны вокруг действующей скважины и интенсивность твердой породы.// АМЕА-nin Xəbərləri, Yer elmləri, 2006, № 2, с. 55-64.
76. Рамазанов Т.К., Гюльмамедов М.Х., Ханбабаева М.Г. Эксплуатация газовой скважины в условиях неустойчивости призабойной зоны // Вестник Бакинского Университета. 2008, № 2, с. 102-108.
77. Рамазанов Т.К. Пластические зоны вокруг действующей скважины// Известия ВУЗОВ, Нефть и газ, 1996, № 3-4, с. 13-19.
78. Рамазанов Т.К. Ханбабаева М.Г. Динамика развития дилатансионно-пластической зоны вокруг эксплуатационной скважины и процесса пескопроявления / Тезисы международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения чл. корр. НАНА, профессора И.Т.Мамедова, Баку, 2005, с. 166.
79. Рамазанов Т.К. Ханбабаева М.Г. Определение гидрогазодинамических параметров и размеров дилатансионнопластической зоны пласта вокруг действующей скважины // Научный журнал «Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых». РАН Сибирское отделение, 2009, январь-февраль, № 1, с. 30-40.
80. Рамазанов Т.К., Ханбабаева М.Г. Установившееся движение идеального газа в зонально-однородном дилатансионно-пластическом и упругом круговом пласте // Вестник Бакинского Университета, 2009, № 3, с. 85-92.
81. Рейнер М. Реология. Пер. с англ.М: Наука, 1965.-223с.
82. Рейнер М. Деформация и течение. Пер. с англ.-М:Гостехиздат, 1965.-381с.
83. Ржаницын А.Р. Теория ползучести.-М: Стройиздат, 1968.-

- 416с.
84. Снеддон И, Преобразования Фурье. Пер. с. англ. М.: Изд.во иномтранной литературы, 1955, 668 с.
 85. Теория и практика применения неравновесных систем в нефтедобыче / Мирзаджанзаде А.Х., Магсудов Ф.Г, Нигматулин Р.И. и др.-Баку: Элм, 1985-220с.
 86. Терцаги К. Теория механики грунтов М.: Госстройиздат, 1961, 507 с.
 87. Требин Ф.А., Черных В.А. Напряженное состояние нефтегазоводоносных пластов при их разработке // Инженерный журнал: Механика твердого тела. М.:, 1967, с. 137-140.
 88. Фильтрационные процессы и идентификация параметров в многопластовых месторождениях/ М.Т.Абасов, Э.Х.Азимов, С.С.Азимова, Г.И.Джалалов, Т.Т.Ибрагимов, Н.Т.Караева/. Баку: Изд-ва «Nafta-Press», 2008, 302 с.
 89. Флорин В.А Основные уравнения консолидации земляной среды // Докл. АН СССР,-1948.-№ 1.-с. 21-24.
 90. Ханбабаева М.Г. Дилатансионно-пластические расчеты разрушений в призабойной зоне действующей скважины/ Тезисы XII международной конференции по математике и механике, посвященной 70 летнему юбилею чл. корр. НАНА, профессораБ.А.Искендерова, Баку, 2006, с. 167.
 91. Ханбабаева М.Г. Моделирование процессов фильтрации флюидов в деформируемых пористых средах при различных напряженных состояниях. Диссертация на соискание научной степени доктора философии по математическим наукам. Баку, 2010, 117 с.
 92. Ханбабаева М.Г. Расчеты дилатансионно-пластических разрушений вокруг действующей скважины // АМЕА-nin Xəbərləri, Fizika-texnika və riyaziyyat elmləri seriyası, riyaziyyat və mexanika buraxılışı. 2006, № 7, с. 139-144.
 93. Ханбабаева М.Г. Эксплуатация газовой скважины в условиях неустойчивости призабойной зоны /Тезисы научной конференции, посвященной 100-летию заслуженного деятеля науки, академика А.И.Гусейнова, БГУ, 2007, с. 149-150.
 94. Хасаяев А.М., Эфендиев И.Ю., Шаронова И.А. Об одной

- возможной причине разрушения структуры породы нефтяного пласта // Азербайджанское нефтяное хозяйство. 1998, № 2-3, с. 12-16.
95. Хорошун Л.П., Исафилов Р.М. О напряженном состоянии гидронасыщенного массива в окрестности выработки квадратного поперечного сечения // Прикл. Механика. 1984, т. 20, № II, с. 108-111.
96. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. - М.: Гостехиздат, 1963, - 396 с.
97. Черных В.А. Нелинейно-упругий режим фильтрации в упруго-вязкой пористой среде // Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, №2, с. 163-167.
98. Черных В.А. Геомеханика - новое понятие в теории разработки нефтяных и газовых месторождений // Вопросы методологии и новых технологий разработки месторождений природного газа. Часть 1. М.: ВНИИГАЗ, 1994, с. 34-82.
99. Черных В.А. Гидрогеомеханика нефтегазодобычи. М.: ОАО «Газпром», ООО «ВНИИГАЗ», 2001, 277 с.
100. Щелкачев В.Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. М.: Издат. Нефть и газ., 1995, ч. 2, 493 с.
101. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // J.Appl.Phys. 1955, v.26, N2, p. 182-194.
102. Bishop A.w. Shear strength parameters for undisturbed and remolded soil specimens, Stress-strain behavior of soils (ed. by R.H.G. Parry)/ Proceedings of the Roscoe Memorial Symposium, Cambridge University, 1972, D. 3-58. p. 134-139. Пер. на рус. яз. Определяющие законы механики грунтов., Механика, Новое в зарубежной науке. – Издат. Мир, 1995, вып. 2. –С. 7-75.
103. Jacob C.E. On the flow of water in an elastic artesian aquifer // Trans. Americ. Geophys. Union, Reports and Papers. Hydrology. 1940, N7, pt. II, p. 547-586.
104. Jalilov G.N., Kerimov Z.A., Mirzoyeva D.R. Direct and inverse problems of relaxation direct filtration// Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan. Mathematics and

Mechanics, 2000, v. XX, N 1, p. 196-202.

105. Ramazanov T.G., Atayev G.N. Development of plastic zone around a hole in dilatating medium with unevenly changing properties. Baki. Transaction of academy of sciences of Azerbaijan, 1999, N1-2, "ELM" publishing house. p. 206-215.
106. Sulem J., Muhlhaus Hans-B. A continuum model for periodic two-dimensional block structures // Mechanics of cohesive-frictional materials. 1997, v.2, N 1, p. 21-46.
107. Ханбабаева М.Н. Calculations of dilatant plastic failures around running well // Translations issue mathematics and mechanics series of physical-technical&mathematical science. 2006, № 7, p . 139-144.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
-----------------------	---

Глава I.

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ВЛИЯНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ГОРНЫХ ПОРОД НА ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЗАЛЕЖАХ НЕФТИ И ГАЗА .	6
---	---

Глава II.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ДИНАМИКИ ДИЛАТАНСИОННО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ ВОКРУГ ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СКВАЖИНЫ В СЛАБОЦЕМЕНТИРОВАННЫХ НЕФТЯНЫХ КОЛЛЕКТОРАХ.....	16
2.1. Постановка задачи.....	16
2.2. Решение задачи в пластической зоне $[a(t) \leq r \leq R(t)]$	21
2.3. Решение задачи в упругой зоне $[r \leq R(t) \leq \infty]$	26
2.4. Определение интенсивности выноса твердой фазы породы пласта на стенке скважины.....	30
2.5. Автомодельное решение задачи при локализации в ближней окрестности забоя скважины.....	41

Глава III.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДИЛАТАНСИИ ПОРОДЫ НА ПРОЦЕСС ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ГАЗОВОЙ СКВАЖИНЫ.....	48
3.1. Неустановившаяся осесимметричная фильтрация идеального газа мгновенно включенной с постоянным дебитом скважине.....	49
3.2. Автомодельное решение.....	53
3.3. Установившееся движение идеального газа в зонально-однородном дилатансионно-пластическом и упругом круговом пласте.....	60

Глава IV.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ
ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛЗУЧЕМ ПЛАСТЕ..... 75**

4.1. Приток жидкости к несовершенной скважине в
круговом однородном пласте 76

4.2. Результаты численных расчетов. 85

4.3. Нестационарная фильтрация жидкости к
несовершенной скважине в неоднородных ползучих
средах..... 92

4.4. Решение интегро-дифференциального уравнения
фильтрации с учетом ползучести в анизотропной
среде..... 101

4.5. О нестационарном движении жидкости к скважинам
в изолированных пластах с учетом ползучести сред. 116

4.6. О решении интегро-дифференциальных уравнений
фильтрации жидкости с учетом ползучих сред. 126

4.7. Математическое моделирование фильтрации
жидкости в средах с различными типами ползучести. 132

4.8. Решение уравнения фильтрации в неоднородной
среде с учетом ползучести..... 138

4.9. Нестационарная фильтрация жидкости в
неоднородной среде с учетом двойной релаксации 145

4.10. Неустановившийся приток жидкости в неоднородных
средах, разделенных слабопроницаемой перемычкой с
учетом двойной релаксации..... 151

Глава V.

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ИНТЕРПРЕТАЦИИ
РЕЗУЛЬТАТОВ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО
ИССЛЕДОВАНИЯ СКВАЖИН В ПЛАСТАХ С
ПОЛЗУЧЕЙ СРЕДОЙ 157**

5.1. Методика определения параметров ползучести среды
и фильтрационных параметров неограниченного пласта
с ползучей средой. 157

5.1.1. Постановка задачи и основные аналитические
соотношения..... 157

5.1.2. Теоретические кривые восстановления забойного давления скважин, вскрывших пласт с ползучей средой.	164
5.1.3. Методика определения параметров пласта с ползучей средой по данным восстановления забойного давления.	167
5.2. Методика определения параметров ограниченного пласта с ползучей средой.	172
5.2. Примеры определения фильтрационных и ползучих свойств пласта по данным восстановления или падения забойного давления.	180

Глава VI.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ ЗАВОДНЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ДЕФОРМИРУЕМОГО ОДНОРОДНО-АНИЗОТРОПНОГО ПЛАСТА.	189
6.1. Изучение влияния анизотропии проницаемости на коэффициент охвата.	189
6.2. Влияние степени и угла ориентации анизотропии по проницаемости деформируемой среды на дебит скважин.	198
6.3. Исследования условий ограничения подвижности газонефтяного контакта в деформируемом пласте.	207

Глава VII.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗРАБОТКИ МНОГОПЛАСТОВЫХ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ, РАЗРАБАТЫВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ СКВАЖИН.	215
7.1 Взаимодействие скважин в неоднородных полосообразных пластах со слабопроницаемой кровлей.	216
7.2 Неустановившееся течение жидкости к системе скважин в залежах со слабопроницаемой перемычкой.	226
7.2.1. Полосообразная залежь.	226
7.2.2. Круговая залежь.	232

Глава VIII.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ФЛЮИДОВ

В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТРЕЩИНОВАТО-

ПОРИСТЫХ СРЕДАХ 236

8.1. О методах решения исследуемого класса задач и
сравнительная оценка различных моделей фильтрации 236

8.2. Особенности фильтрации жидкости к прямолинейной
галерее при нелинейно-упругом режиме 251

8.3. Осесимметричная неустановившаяся фильтрация в
бесконечном пласте 258

8.4. Исследование нестационарной фильтрации жидкости
к несовершенной скважине 262

8.5 Аналитическое решение задачи о нестационарной
плоско радиальной фильтрации реального газа 271

8.6. Влияние степени вскрытия трещиноватопористых
коллекторов на дебит газовых скважин 278

8.7. О некоторых точных решениях задач нестационарной
фильтрации жидкости в среде с двойной пористостью 284

8.7.1. Приток жидкости к галерее в ограниченном
полосообразном ТПП 284

8.7.2. Нестационарный приток жидкости к скважине
конечного радиуса 288

8.8. Расчет продвижения подошвенной воды в газовую
залежь в трещиновато-пористой среде 293

8.9. Взаимодействие скважин круговой батареи в
недеформируемом трещиновато-пористом пласте 297

8.10. О движении границы раздела нефть-вода в трещи-
новато-пористых средах 304

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 310

ЛИТЕРАТУРА 313

СОДЕРЖАНИЕ 323

Гариб Джалалов
Мамед Дунямалыев
Мехри Ханбабаева

**ГИДРОГАЗОДИНАМИКА ПРОЦЕССОВ
ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДОВ В НАПРЯЖЕННО
ДЕФОРМИРОВАННЫХ ПЛАСТАХ**

