

Г.И.Джалалов, М.А.Дунямалыев, М.Г.Ханбабаева

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ
ФЛЮИДОВ
В НАПРЯЖЕННО-
ДЕФОРМИРОВАННЫХ
ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

ÇAŞIOĞLU

2012

Под общей редакцией *член-корр. НАНА Г.И.Джалалова*

Рецензенты: *д.т.н. М.Н.Велиев*
Ведущий научный сотрудник
НИПИнефтегаз ГНКАР
к.ф-м.н. Ф.А.Масимов

Джалалов Г.И., Дунямалыев М.А., Ханбабаева М.Г.

Моделирование процессов фильтрации флюидов в напряженно-деформированных пористых средах.

Баку: Чашыюглу, 2012. – 208 стр.

В книге рассматриваются вопросы математического моделирования процессов фильтрации жидкостей и газов в напряженно-деформированных пористых средах. В работе впервые произведено математическое моделирование динамики развития дилатансионно-пластической зоны вокруг действующей эксплуатационной скважины при нестационарном режиме фильтрации флюидов. Установлена связь между полученными из скважины расходами жидкой и твердой фаз и предложены критерии регулирования ее с помощью пластового давления. Сформированы и точными аналитическими методами решены задачи о нестационарной фильтрации жидкости к совершенным и несовершенным скважинам в однородных, однородно-анизотропных и кусочно-однородных по проницаемости пластах. Анализ полученных результатов позволил теоретически исследовать вопрос о влиянии наследственных свойств пористой среды на характер фильтрации и на отдельные технологические показатели разработки месторождений. Результаты, приведенные в работе можно использовать для практических рекомендаций обоснования выбора технологического режима нефтяной и газовой скважин в неустойчивых коллекторах, прогнозирования выноса песка и борьбы с ним в процессе эксплуатации месторождения. Монография рассчитана на научных и инженерно-технических работников.

ISBN 978-9952-466-96-6

© Джалалов Г.И., Дунямалыев М.А., Ханбабаева М.Г., 2012

Введение

Известно, что деформации насыщенных пористых сред, как правило, приводят к ухудшению их коллекторских свойств, что ведет к снижению добычи нефти и газа. Однако ползучесть матрицы пласта приводит к релаксации напряжений давления и гидродинамических параметров, что увеличивает время развития воронок депрессии в скважинах.

Если процессы фильтрации в обычных поровых коллекторах изучены достаточно хорошо, то закономерности движения жидкости в деформируемых средах находятся в стадии их углубленного исследования.

Рассмотрению различных аспектов этой проблемы посвящены многочисленные работы как отечественных, так и зарубежных исследователей. Вместе с тем, целый ряд ее принципиальных положений требует своего усовершенствования. В частности, недостаточно исследованы вопросы, связанные с более полным учетом реальных факторов, влияющих на развитие гидродинамической обстановки в подверженном деформации коллекторе и массоперенос насыщающих его флюидов. Поэтому при проектировании разработки нефтегазовых месторождений необходимо учитывать влияние всех указанных факторов на динамику фильтрационного потока.

При эксплуатации нефтяных месторождений, сложенных слабоцементированными и рыхлыми породами, вместе с извлекаемой жидкостью в скважину поступает песок. Поступление разрушенной породы осложняет и нарушает нормальный режим работы скважин. Оно приводит к

образованию песчаных пробок в скважинах, преждевременному износу и выходу из эксплуатации скважинного оборудования.

Вынос большого объема песка из пласта обуславливает образование каверн в призабойной зоне пласта, что при достижении критических размеров сопровождается обвалами вышележащих пород и деформациями, приводящими к выходу скважин из эксплуатации.

Важнейшей проблемой рациональной эксплуатации месторождений, сложенных слабоцементированными и рыхлыми породами, является предотвращение поступления песка из пласта в скважину. В связи с этим, возникает необходимость разработки технических средств и технологических процессов, увеличивающих межремонтный период работы и срок службы пескопроявляющих скважин.

Так как при эксплуатации пескопроявляющих скважин в призабойной зоне пласта (ПЗП) образуются дилатансионно-пластические зоны, где разрушается скелет породы и выносятся песок, чтобы выбрать способ крепления ПЗП, необходимо определить параметры этих зон.

Как известно, технологический режим работы скважины, эксплуатация которой сопровождается выносом песка, определяется при условии максимально возможного ограничения твердых фрагментов пласта в стволе скважины. Поэтому этот режим должен обеспечивать постепенную нагрузку скважины и её работу с минимальными скоростями фильтрации. На практике это достигается постепенным увеличением дебита до некоторого максимального значения, при котором вынос песка находится в допустимых пределах. В связи с этим изучение механизма развития упруго-пластических зон вокруг эксплуатационной скважины, определение порового давления вдоль пласта и выноса объема разрушенных твердых пород в скважину при разработке слабоцементированных месторождений со сложными рео-

логическими свойствами представляют актуальность и имеют большой практический интерес.

Настоящая работа посвящена изложению целого круга задач. Выполнен комплекс аналитических и численных исследований по совершенствованию математического моделирования пластовых систем, предложены расчетные схемы (и алгоритмы) для их практического использования при решении задач разработки пластов с деформируемыми терригенными коллекторами.

Глава I.
**СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ
ВЛИЯНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ГОРНЫХ ПОРОД НА
ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЗАЛЕЖАХ
НЕФТИ И ГАЗА**

В последние годы открыто и осваивается значительное число нефтяных залежей с осложненными физико-геологическими условиями. Влияние этих осложнений на технологические решения велико и необходимость учета на всех стадиях разработки очевидна. В первую очередь, этим осложнениям относятся аномальные термодинамические условия в залежах на больших глубинах.

Опыт разработки нефтяных залежей подтверждает, что при понижении пластового давления существенно возрастает эффективное давление, величина которого может быть весьма существенной. При разработке залежей с аномально высоким пластовым давлением наблюдается более значительное изменение эффективного давления. При понижении пластового давления отмечается большой диапазон колебания между текущим эффективным и начальным давлениями на глубине залегания. При экспериментальных исследованиях образцов горных пород отмечено, что породы, приуроченные к зонам развития аномально высоких пластовых давлений (АВПД), как правило, проявляют меньшие прочностные характеристики и небольшую способность к деформированию по сравнению с аналогичными породами из интервалов разреза без АВПД. Это подтверждают и промысловые наблюдения. С ростом глубины зале-

гания продуктивных пород, т.е. с увеличением горного давления - P_2 эффективное давление также возрастает.

Основные параметры, характеризующие прочностные свойства пород, являются функциями эффективного давления. При достижении уровня напряженного состояния предел прочности и текучести приводит к возникновению необратимых изменений пористости и проницаемости. В этом случае для описания деформационного поведения породы-коллектора уже не достаточно применения только упругих констант материалов, слагающих эти породы.

Задачи фильтрации флюидов в условиях линейно-упругой и нелинейно-упругой деформации горных пород в нефтяных и газовых пластах достаточно подробно были исследованы в работах Л.С.Лейбензона, В.Н.Щелкачева, М.Маскета, Ю.П.Желтова, М.Т.Абасова, Э.Х.Азимова, Г.И.Джалалова, К.Н.Джалилова, С.Н.Закирова, А.М.Кулиева, А.М.Дунямалыева, В.А.Черных, В.Н.Николаевского, К.С.Басниева, А.Т.Горбунова, Е.С.Ромма, Р.Г.Исаева, Н.П.Лебединца, Г.А.Зотова, Г.И.Баренблатта, А.П.Крылова и др.

Первые научные результаты в теории упругопластического режима фильтрации были получены Г.И.Баренблаттом и А.П.Крыловым в 1955 г. [22]. Несколько позднее Ю.П.Желтовым были проведены обширные теоретические исследования деформации горных пород и механического взаимодействия продуктивного пласта с потоком пластовых флюидов в рамках упругого и упруго-пластического режима фильтрации. Для рассматриваемой области явлений им был предложен новый термин «механика нефтегазонасного пласта» [49].

А.Г.Горбунов [27] обратил внимание на создание обобщенной теории фильтрации с учетом необратимых изменений упомянутых параметров. В этом направлении проведены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования, которые привели к новому расчет-

ному методу определения технологических показателей разработки месторождений.

При эксплуатации скважин начальное пластовое давление уменьшается. Падение давления в поровом пространстве приводит к увеличению эффективных напряжений в скелете пласта и при определенных условиях происходит перемещение частиц скелета, которые инициируют изменение его структуры. С одной стороны, фильтрация жидкости в зависимости от поведения пористой среды может происходить как при упругих деформациях, так и при жесткопластических и упруго-пластических деформациях. С другой – степень остаточной деформации также зависит от состава жидкости, насыщающей пористую среду.

При разрушении насыщенных пористых сред, ведущую роль играют эффективные напряжения. По мнению Терцаги К. все измеримые эффекты изменения напряжений, такие как сжатие, искажение формы и изменение сопротивления сдвигу происходят исключительно благодаря изменению эффективных напряжений.

Известно, что горные породы в отличие от твердого тела обладают свойством дилатансии. Поэтому реальные законы деформации глубинных пластов требуют построения более сложных реологических моделей горных пород. Однако общий анализ процессов деформирования наталкивается на значительные трудности и исследователи прибегают к поискам различных возможных упрощений в постановке и решении конкретных задач.

Классические задачи об устойчивости или ограниченном равновесии исследовались на основании модели жесткопластического материала, свойства которого определены единственным значением предела прочности. Поэтому с целью адекватного описания реальной ситуации далее предлагается использовать более сложную упруго-пластическую модель, в которой предельное состояние является

как функцией модуля деформации, так и функцией предела прочности [82]. Однако деформирование реальных горных пород (исключая очень рыхлый песок в испытаниях с дренажем) после достижения точки разрушения продолжается при уменьшающемся напряжении, т.е. происходит уменьшение предела прочности при возрастании деформации до тех пор, пока напряжение не установится на некотором конечном или остаточном уровне [83]. Здесь главной проблемой является формулировка адекватных определяющих законов деформирования. Действительно, деформирование гранулированных горных пород происходит при взаимном проскальзывании зерен, а большому пиковому значению напряжения сопутствует хрупкое разрушение. Впервые такое исследование было выполнено D.Drucker'ом, W.Prager'ом, согласно которому с использованием пластического потенциала, было получено соотношение между деформациями и напряжениями. С математической точки зрения предложенная ими модель, так называемый ассоциированный закон, совместно с условием Мора-Кулона, вполне удобна для изучения полей скорости и напряжения. Из ассоциированного закона следует очень важный вывод: пластические деформации должны сопровождаться увеличением объема. Это свойство известно под названием дилатансии [69]. Закономерность расширения упруго-пластических зон в таких породах вокруг выработки исследована в [96]. Показано, что в зависимости от значения главного напряжения вокруг неё могут возникнуть максимум три пластические зоны.

В работе [14] рассматривается возникновение и расширение пластической зоны вокруг действующей скважины в пласте, подчиняющейся условию текучести Мизеса-Губера-Шлейхера и ассоциированному закону деформации. Получены аналитические соотношения между радиусами пластических зон параметров пласта и дебита скважины. В [66] рассмотрены вопросы влияния порового и горного

давлений на устойчивость призабойной зоны действующей скважины. Отметим, что неровное горное давление приводит к локализации пластического разрушения пород [36], приводящих к просадке дневной поверхности территории месторождения.

В теории пластичности обычно считается, что линии скольжения касательного разрыва служат характеристиками полей скоростей. В модели Друккера-Прагера показано что из-за дилатансии на этой характеристике скачку касательной скорости всегда сопутствует скачок нормальной скорости. Если представить скачкообразную зону в виде полосы малой ширины, то эта зона должна непрерывно расширяться. Однако этот результат связан не с ассоциированным законом, а с эффектом дилатансии.

Скорость дилатансии в переходной зоне по мере пластической деформации убывает и расширение этой зоны постепенно прекращается.

Проведенные качественные рассуждения и экспериментальные расчеты А. Bishop'а показывают, что по мере роста пластической деформации плотной горной породы ослабляется сопротивление сдвигу и убывает угол внутреннего трения. Пористые скальные породы, находящиеся под внешним горным давлением, дилатируют по мере их упругого деформирования перед разрушением и наблюдается распространение трещины.

Для сыпучих сред внутренние силы незначительно влияют на их механическое поведение. Такая категория сред включает в себя песок, крупный ил, гравий и дробленую горную породу. Названные среды отличаются от других пород также и тем, что все образцы обладают заметной дилатансией при сдвиге и при большом падении порового давления [70, 90]. Проведенные испытания показывают, что для определения условий разрушения необходимо знание всех трех компонентов главных эффективных

напряжений. При известных наибольшего, среднего и наименьшего главных эффективных напряжений предложены основные условия разрушения [83]. A. Bishop провел испытание при плоском деформировании и обосновал условия разрушения [82].

При оценке упругопластического массива в окрестности скважины необходимо учитывать состояние окружающих горных пород как материала с изменяющимися в процессе нагружения физико-механическими свойствами. Если на некотором достаточном удалении от скважины породный массив является практически сплошным и его можно считать подчиняющимся линейному закону Гука, то по мере приближения к скважине породы находятся в разрыхленном состоянии, причем степень разрыхления тем больше, чем меньше расстояние от контура скважины до рассматриваемой точки. Максимальное разрыхление наблюдается на самом контуре.

Развитие систем трещин в данной области происходит постепенно и не приводит к полному разрушению элементарного объема пород.

Эксплуатация залежей, продуктивная толща которых сложена слабосцементированными и рыхлыми породами, осложняется размывом, разрушением и выносом пород из призабойной зоны скважины. Поступление разрушенной породы осложняет и нарушает нормальный режим работы скважин. Оно приводит к образованию песчаных пробок в скважинах, преждевременному износу и выходу из эксплуатации внутрискважинного оборудования. В то же время вынесенная на поверхность разрушенная порода, оседая в трубопроводах и резервуарах, создает значительные технологические трудности и дополнительные затраты.

В процессе фильтрации происходит изменение пористости и проницаемости в зависимости от пластового давления и выноса песчинок со временем.

Количество выносимого песка зависит от скорости фильтрации жидкости.

В работе А.Т.Горбунова [27] даны четыре схемы выноса песка при различных режимах фильтрации жидкости в процессе разработки нефтяных месторождений.

После разрушения скелета пласта в скважину начинают интенсивно поступать твердые фрагменты. В начальной стадии нагружения скелета вокруг эксплуатационной скважины возникает упругопластическая деформация и происходит интенсивный вынос твердых пород. За этой зоной пласт находится в упругом напряженно-деформированном состоянии, с понижением забойного давления упругая зона уменьшается. По азербайджанским и западно-сибирским месторождениям установлено, что при прочих равных условиях и резком увеличении депрессии вынос песка растет значительно быстрее, чем при медленном достижении той же депрессии. Этот факт объясняется разными схемами и подробно изложен в книге [27]. Например, в Малгобекском месторождении при начальном пластовом давлении 43 кг/см^2 скважины вступили в эксплуатацию с дебитами 50-70 тон/сутки при депрессиях 10-15 кг/см^2 . В течение 2-3 лет пластовое давление упало до 20 кг/см^2 и одновременно отмечался усиленный вынос песка и образование пробок. При освоении Астраханского и Ахтырско-Бугундырского месторождений исследователи, также столкнулись с резким выносом песка, что свидетельствует о том, что весь песчаник пласта уже превратился в песок. Вынос песка вместе с жидкостью проявляется не только на многих нефтяных месторождениях, но и на газовых месторождениях. Как утверждалось в работе В.В.Масленникова и В.С.Ремизова, течение песка происходит лишь по тонкому рыхлому прослою. Такие слои на практике могут быть выделены с помощью сейсмических или радиометрических методов.

Возможная причина пескопроявления из пласта объясняется пульсационным режимом работы и возникающими при этом высокочастотными малоамплитудными волнами, приводящими к усилению концентрации напряжений вокруг скважин. Исследования, проведенные А.Ф.Лебедовым, показывают, что разрушение призабойной зоны скважины связано с плавным состоянием сыпучих сред.

Влияние реологических свойств горных пород, в т.ч. вязкоупругих, идеально пластичных, вязкопластичных, упруго-вязкопластичных и наследственных, на процессы фильтрации было исследовано в работах Р.Г.Исаева и В.А.Черных.

В работах В.А.Черных предложены новые математические модели, позволяющие рассчитывать в рамках линейной теории упругости сложные напряженные состояния пласта-коллектора и массива окружающих горных пород при любом распределении давления флюида по объему залежи произвольной формы [98].

Большая заслуга в создании научных основ геомеханики процессов разработки нефтяных и газовых месторождений принадлежит В.Н.Николаевскому [68,73]. В работах В.Н.Николаевского поставлены проблемы геомеханики процессов разработки месторождений нефти и газа и в определенной степени решены на современном научном уровне. В первую очередь это касается анализа уравнений механики горных пород с учетом дилатансии, нестационарных движений насыщенных пористых сред, упругого и неупругого режима фильтрации, динамического воздействия на пласт с целью увеличения нефтеотдачи. Одним из первых В.Н.Николаевский совместно с Т.К.Рамазановым исследовали напряженно-деформированное состояние пласта-коллектора с учетом механического взаимодействия его с массивом окружающих горных пород. Развивая далее эти работы Т.К.Рамазанов решил ряд задач нелокально-упруго-

го режима фильтрации с учетом неупругости горных пород [75-78].

Влияние дилатансии на проницаемость породы выражается в том, что при одноосном сжатии проницаемость образца вначале уменьшается, затем увеличивается с появлением микротрещин и, наконец, уменьшается при необратимом уплотнении породы. Математические модели влияния дилатансии на процессы добычи нефти и газа впервые были разработаны В.Н.Николаевским.

Дальнейшее исследование фильтрации в первоначально неуплотненных горных породах показало, что во многих случаях представление о кусочно –линейной деформации не описывает точно механизм фильтрации в породах, деформирующихся по сложным реологическим законам. Оказалось, что необходимо учитывать то, что деформирующаяся горная порода не мгновенно приходит в равновесное деформированное состояние, а в ней возникает явление релаксации.

Так появилось представление о реологическом режиме нефтяных пластов, впервые введенное Ю.П.Желтовым, и начало развиваться в работах Ю.М.Молоковичам, М.Т.Абасовам, К.Н.Джалиловам, А.М.Кулиевам, Н.Н.Непримеровам, Р.Г.Исаевам, И.М.Аметовам, К.С.Басниевам, М.А.Дунямалыевам, З.А.Керимовам, М.Г.Ханбабаевой и др.

Проведенные нами исследования показали, что несмотря на полученные результаты в области теории релаксационной фильтрации, имеются серьезные трудности при исследовании как прямых, так и обратных задач. Кроме того, эти исследования показали, что некоторые результаты и методические подходы для решения прямых и обратных задач релаксационной фильтрации требуют проведения дополнительных исследований и уточнений. Более обширный обзор исследований в этом направлении приведен в работах [10, 46, 47, 59, 67 и др.].

В связи с тем, что с каждым годом увеличивается число разрабатываемых трещиноватых месторождений с высоким пластовым давлением, эксплуатирующихся при значительных перепадах давления, возникает необходимость учета реальных свойств флюидов и породы при гидродинамических расчетах [34]. Согласно исследованиям, проведенным в работах Е.С.Роммом, Р.Г.Исаевым и др., трещиноватые нефтяные пласты часто расчленены регулярно ориентированными системами трещин. В этом случае среда является анизотропной и ее проницаемость зависит от густоты трещин, их раскрытости, ориентации и давления.

Ряд задач по исследованию влияния анизотропии проницаемости терригенных и трещиноватых пластов на характеристики фильтрационного потока рассмотрен в [34].

В целом, принимая во внимание существенно произвольный характер изменения функции проницаемости, математическое моделирование неоднородных и анизотропных по проницаемости пластов остается актуальным и по сей день.

Дальнейший анализ современного состояния рассматриваемых проблем приводится непосредственно в соответствующих главах.

Глава II.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ДИНАМИКИ ДИЛАТАНСИОННО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ ВОКРУГ ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СКВАЖИНЫ В СЛАБОЦЕМЕНТИРОВАННЫХ НЕФТЯНЫХ КОЛЛЕКТОРАХ

Интенсификация разработки слабоцементированных нефтегазовых месторождений, с одной стороны, требует увеличения как пластового давления, так и градиента давления, с другой стороны, приводит к интенсивному выносу разрушенной породы. Поэтому одной из проблем подземной гидродинамики является изучение механизма развития упругопластических зон вокруг действующей скважины, регулирования пластового давления и выноса объема поступления разрушенных пород в скважину.

Математическое моделирование процесса фильтрации флюида в дилатирующих зонах вокруг скважины изучены в [14, 77]. В некоторых из перечисленных работах не обращено внимание на скачкообразное изменение пористости на упругопластической границе.

В данном разделе в общем виде изучаются гидродинамические и геометрические характеристики упругопластической зоны пласта вокруг эксплуатационной скважины. Метод определения радиуса данной зоны может быть применен при создании фильтров в скважинах и укреплении призабойной зоны, а информация об объеме выноса разрушенной породы – для предотвращения образования пробок.

2.1. Постановка задачи.

Пусть в плоскорадиальном пласте мощностью h работает одна центральная совершенная скважина с началь-

ным радиусом a_0 . При мгновенной работе скважины с постоянным дебитом Q_f происходит развитие дилатансионно-пластической зоны и интенсивный вынос породы с дебитом $Q_s(t)$ в скважину. За пределом пластической зоны пласт ведет себя как линейно-упругая среда и в этой области на контуре питания R_k поддерживается постоянное пластовое давление p_k . Граница, разделяющая пластическую область от упругой $R(t)$, значительно меньше, чем R_k . На бесконечности выполняется условие покоя, т.е. радиальное эффективное напряжение σ_{rr}^f и пористость m постоянны и равны начальным значениям σ_k^f , m_0 и т.д. Требуется определить динамику интенсивности выноса твердых пород пласта, радиусов дилатансионно-пластической зоны и изменения давления на стенке скважины.

Для пластической зоны уравнения неразрывности твердой и жидкой фаз в случае осевой симметрии имеют вид [14, 73, 77]:

$$\frac{\partial(1-m)\rho_s}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(1-m)\rho_s \mathcal{G}] = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial m \rho_f}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r m \rho_f w) = 0,$$

Уравнения равновесия твердого скелета и движение жидкости с учетом скорости движения твердой фазы (обобщение закона Дарси) представлены ниже:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^f}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^f - \sigma_{\theta\theta}^f}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{k}{\mu_o} \frac{\partial p}{\partial r} = -m(w - \mathcal{G}), \quad (2.2)$$

Кроме этого имеем дилатансионное соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + \frac{\mathcal{G}}{r} &= \Lambda \sqrt{\frac{3}{3-\Lambda^2}} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} - \frac{\mathcal{G}}{r} \right) \quad \text{или} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + n \frac{\mathcal{G}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

условие текучести Морра-Кулона в главном эффективном напряжений

$$\sigma_{\theta\theta}^f - N\sigma_{rr}^f = K. \quad (2.4)$$

Отметим, что в системе (2.1-2.4) m, k – пористость и коэффициент проницаемости пласта, ρ_f, w, p - истинные плотность, радиальная скорость и поровое давление жидкой фазы, ρ_s, v - истинные плотность, радиальная скорость твердой фазы, μ_0 - динамическая вязкость жидкости, $\sigma_{rr}^f, \sigma_{\theta\theta}^f$ - радиальное и кольцевое эффективные напряжения, α, φ - коэффициенты внутреннего трения и сцепления, Λ - скорость дилатансии,

$$N = (1 + \sin \varphi) / (1 - \sin \varphi),$$

$$K = 2v \sin \varphi / \alpha (1 - \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \alpha \frac{\sqrt{3(3-\Lambda^2)}}{3-\alpha\Lambda}, \\ n &= 1 + \frac{2\Lambda(3\Lambda + \sqrt{3(3-\Lambda^2)})}{3-4\Lambda^2}. \end{aligned}$$

При этом случай $\Lambda > 0$ характеризует разрыхление плотной матрицы пласта, $\Lambda < 0$ – уплотнение рыхлой матрицы, $\Lambda = 0$ – критическое состояние (несжимаемость среды).

В пластической зоне ($a(t) \leq r \leq R(t)$) система уравнений (2.1) – (2.4) относительно неизвестных $m, p, w, v, \sigma_{rr}^f, \sigma_{\theta\theta}^f$ замкнута. Здесь текущий радиус $a(t)$ скважины определяется в ходе решения задачи. Плотности фаз являются функциями переменных:

$$\rho_f = \rho_f(p), \rho_s = \rho_s(p, \sigma^f),$$

где $\sigma^f = \frac{1}{3} \sigma_{ij}^f \delta_{ij}$.

В упругой зоне $R_k > R(t) < \infty$ выполняются те же уравнения (2.1) – (2.2) с упругими параметрами пласта, которые замыкаются обобщенным законом Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{fe} &= 2G \left(\frac{\partial u_r^e}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) + \varepsilon p_e, \\ \sigma_{\theta\theta}^{fe} &= 2G \left(\frac{u_r^e}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) + \varepsilon p_e, \\ \sigma_{zz}^{fe} &= \nu (\sigma_{rr}^{fe} + \sigma_{\theta\theta}^{fe}) - (1-2\nu) \varepsilon p_e \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $2G$ – модуль сдвига; p_e - поровое давление в упругой зоне, E, ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона сухого пласта, ε - коэффициент сцементированности матри-

цы пласта, e , u_r^e - объемная деформация и радиальные перемещения твердых частиц в упругой зоне,

$$\varepsilon = (1 - m_0) \beta_1 K,$$

$$e = \frac{\partial u_r^e}{\partial r} + \frac{u_r^e}{r},$$

$$G = (1 - m_0) E / 2(1 + \nu),$$

$$\nu^e = \frac{\partial u_r^e}{\partial t}, \quad K = E / 3(1 - 2\nu).$$

В упругой области искомыми являются те же параметры: $m_e, p_e, w_e, u_r^e, \sigma_{rr}^{fe}, \sigma_{\theta\theta}^{fe}$, и система уравнений (2.1), (2.2), (2.5) для них также замкнута.

Начальные и граничные условия: Предположим, что при $t=0$

$$p = p_e = p_k,$$

$$m = m_0.$$

На стенке скважины при $r = a(t)$ радиальное эффективное напряжение равно нулю и задан дебит жидкой фазы скважины

$$\sigma_{rr}^f = \sigma_a^f = 0, \tag{2.6}$$

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{Q_f \mu_0}{2\pi k_a h}.$$

На упругопластической границе $r = R(t)$ должны выполняться условия равенства значений скорости смещений, радиального напряжения и давления:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^e, \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^e, p = p_e, \quad (2.7)$$

в бесконечности:

$$\sigma_{rr}^f = \sigma_k, m = m_0, p = p_k. \quad (2.8)$$

2.2. Решение задачи в пластической зоне $(a(t) < r < R(t))$.

Сперва определим радиальную скорость твердой фазы. Для этого (2.3) находим

$$v = c(t)r^{-n},$$

Скорость стенки скважины $\dot{a}(t)$ определяется скоростью твердых частиц, находящихся в ней. Отсюда находим $v(t)$, т.е.

$$v(a) = \frac{da}{dt}, \quad c(t) = \dot{a}a^n,$$

$$v = \left(\frac{a}{r}\right)^n \frac{da}{dt}.$$

Для определения пористости используем это соотношение. Уравнение сохранения массы твердой фазы (2.1) приводим к уравнению

$$\frac{\partial \ln((1-m)\rho_s r^{1-n})}{\partial a^{n+1}} + \frac{\partial \ln((1-m)\rho_s r^{1-n})}{\partial r^{n+1}} = 0,$$

общее решение которого имеет вид:

$$(1-m)\rho_s = f(r^{n+1} - a^{n+1})r^{n+1}.$$

Используя начальные условия

$$a = a_0,$$

$$m = m_0,$$

$$\rho_s = \rho_s^0$$

получаем

$$f(r, a) = (1-m_0)\rho_s^0 (a_0^{n+1} + r^{n+1} - a^{n+1})^{\frac{1-n}{1+n}}.$$

Тогда решение имеет вид

$$(1-m)\rho_s = (1-m_0)\rho_s^0 \left[1 + \left(\frac{a_0}{r} \right)^{n+1} - \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right]^{\frac{1-n}{1+n}}. \quad (2.9)$$

Отсюда, в частности, следует, что если пренебречь деформацией твердой фазы ($\rho_s = \rho_s^0$), то деформирование порового пространства происходит из-за дилатансионного течения породы

$$m = 1 - (1-m_0) \left[1 + \left(\frac{a_0}{r} \right)^{n+1} - \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right]^{\frac{1-n}{1+n}}. \quad (2.10)$$

При этом пористость на стенке скважины

$$m_a = 1 - (1-m_0) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1-n}. \quad (2.11)$$

Полученные результаты позволяют определить поровое давление.

Отметим, что зависимость коэффициента проницаемости от пористости принято представлять в виде (2.1, 2.7):

$$k = k_0 \left(m/m_0 \right)^l, \quad (2.12)$$

где $l = \frac{\alpha_k}{\alpha_m},$

α_k, α_m - коэффициенты изменения проницаемости и пористости. Подставляем теперь второе уравнение (2.2) и формулы (2.10) (2.12) в уравнение сохранения массы жидкости (2.1) и предполагаем, что жидкость несжимаемая. После интегрирования этого уравнения по r получаем:

$$p = -\bar{Q}_f \int \frac{\bar{R}}{x \left\{ 1 - (1 - m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1 - y^{n+1}) \right] \right\}^l} dx +$$

$$+\bar{Q}_s \left(\frac{1}{1 - m_0} \int \frac{\bar{R}}{x^n \left\{ 1 - (1 - m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1 - y^{n+1}) \right] \right\}^{l-1}} dx + \right.$$

$$\left. + (1 - n) \int \frac{\bar{R}}{x} \frac{\int_y^x \left[1 + z^{-n-1} (1 - y^{n+1}) \right]^{\frac{-2n}{n+1}} z^{-n} dz}{x \left\{ 1 - (1 - m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1 - y^{n+1}) \right] \right\}^l} dx \right) + p_e(\bar{R}), \quad (2.13)$$

где $p_e(\bar{R})$ – значение порового давления на упругопластической границе $\bar{R}(t)$,

$$Q_s(t) = -2\pi a h (1 - m_a) v(a),$$

$$Q_f(t) = -2\pi a h m_a w(a),$$

$$\bar{Q}_s(t) = \frac{\mu_0 m_0^l Q_s(t)}{2\pi h k_0},$$

$$\bar{Q}_f(t) = \frac{\mu_0 m_0^l Q_f(t)}{2\pi h k_0},$$

$$\bar{R} = \frac{R}{a_0}, \quad y = \frac{a}{a_0},$$

$$x = \frac{r}{a_0}, \quad z = \frac{\rho}{a_0}, \tag{2.14}$$

$$n_1 = \frac{1 - n}{1 + n}$$

Используя предыдущие результаты по следующей схеме, определим компоненты эффективных напряжений.

Решая первое уравнение (2.2) и учитывая условие текучести (2.4) при граничном условии (2.6), находим эффективные напряжения в дилатансионно-пластической зоне

$$\sigma_{rr}^f = \left(\sigma_a^f + \frac{K}{N-1} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{N-1} + r^{N-1} \int_a^r \rho^{1-N} \frac{\partial p}{\partial \rho} dp - \frac{K}{N-1},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^f - N\sigma_{rr}^f = K$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^f = & x^{N-1} \left\{ \left(\sigma_a^f + \frac{K_n}{N-1} \right) y^{1-N} + \right. \\ & \left. + \bar{Q}_f(t) \int_y^x \frac{dx}{x^N \left\{ 1 - (1-m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1-y^{n+1}) \right]^{n_1} \right\}^l} - \right. \\ & \left. - \bar{Q}_s(t) \left[\frac{1}{1-m_0} \int_y^x \frac{dx}{x^{N+n-1} \left\{ 1 - (1-m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1-y^{n+1}) \right]^{n_1} \right\}^{l-1}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1-n) \int_y^x \frac{\int_z^{\bar{z}} \left[1 + z^{-n-1} (1-y^{n+1}) \right]^{\frac{-2n}{n+1}} z^{-n} dz}{x^N \left\{ 1 - (1-m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1-y^{n+1}) \right]^{n_1} \right\}} dx \right] \right\} - \frac{K_n}{N-1}, \quad (2.15) \end{aligned}$$

Таким образом, получены формулы для U , m , p , σ_{rr}^f и $\sigma_{\theta\theta}^f$, которые зависят от параметров $a(t)$, $R(t)$, $p(R)$.

Скорость w находим из закона фильтрации (2.2), где

$$v = \dot{a}(a/r)^n.$$

2.3. Решение задачи в упругой зоне $[r \leq R(t) \leq \infty]$.

Подставляя (2.5) в первое уравнение (2.2), получаем уравнение для определения u_r^e

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r^e)}{\partial r} \right) - \frac{1-\varepsilon}{2G} \frac{\partial p_e}{\partial r} = 0. \quad (2.16)$$

решение которого находим

$$u_r^e = c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{s}{r} \int_R^r \rho p_e d\rho, \quad (2.17)$$

где $s = (1-2\nu)(1-\varepsilon)/2G(1-\nu)$; c_1, c_2 – параметры интегрирования.

Определим радиальное эффективное напряжение:

$$\sigma_{rr}^{fe} = 2G \left(\frac{c_1}{1-\nu} - \frac{c_2}{r^2} - \frac{s}{r^2} \int_R^{R_k} \rho p_e d\rho - \frac{s}{r^2} \int_{R_k}^{\infty} \rho p_e d\rho \right) + p_e,$$

Учитывая, что $p_e = p_k = const$ при $r \in [R_k, \infty)$ находим:

$$c_1 = \frac{1-2\nu}{2G} [\sigma_k^f - (1-Gs)p_k]$$

$$c_2 = -\frac{R^2}{2G} [\sigma_{rr}^f(R) - p_e(R) - \sigma_k^f + (1-Gs)p_k]$$

Из (2.5) и (2.17) при граничных условиях (2.7), (2.8) определяем напряженно-деформированное состояние пласта в упругой зоне при поддержании постоянного давления на контуре питания R_k :

$$\begin{aligned}
 u_r^e &= \frac{1-2\nu}{2G} \left[\sigma_k^f - (1-Gs) p_k \right] r - \frac{1}{2G} \times \\
 &\times \left[\sigma_{rr}^f(R) - p_e(R) - \sigma_k^f + (1-Gs) p_k \right] \frac{R^2}{r} + \frac{s}{r} \int_R^r \rho p_e d\rho, \\
 \sigma_{rr}^{fe} &= \sigma_k^f - (1-Gs) p_k - \left[\sigma_k^f - (1-Gs) p_k - \sigma_{rr}^f(R) + p_e(R) \right] \times \\
 &\times \frac{R^2}{r^2} - \frac{2Gs}{r^2} \int_R^r \rho p_e d\rho + p_e, \\
 \sigma_{\theta\theta}^{fe} &= \sigma_k^f - (1-Gs) p_k + \left[\sigma_k^f - (1-Gs) p_k - \sigma_{rr}^f(R) + p_e(R) \right] \times \\
 &\times \frac{R^2}{r^2} + \frac{2Gs}{r^2} \int_R^r \rho p_e d\rho + (1-2Gs) p_e, \tag{2.17} \\
 \sigma_{zz}^{fe} &= 2\nu \left[\sigma_k^f + (1-Gs)(p_e - p_k) \right] + (1-2\nu) \varepsilon p_e.
 \end{aligned}$$

Эффективные напряжения (2.18) должны удовлетворять с внутренней стороны упругопластической границы усло-

вию текучести (2.4). Отсюда имеем

$$\sigma_{rr}^f(R) = \frac{2}{N_e + 1} \left[\sigma_k^f - (1 - Gs)(p_k - p_e(R)) - \frac{K_e}{2} \right], \quad (2.18)$$

где N_e, K_e соответствуют состоянию $\Lambda = 0$.

В упругой области объемная деформация и среднее напряжение пласта определяются с помощью формул (2.17)

$$e = sp_e + \frac{1 - 2\nu}{G} [\sigma_k^f - (1 - Gs)p_k],$$

$$\sigma^{fe} = \frac{2(1 + \nu)}{3} [\sigma_k^f - (1 - Gs)p_k] + [(1 - m_0)Ks + \varepsilon]p_e. \quad (2.19)$$

При малых отклонениях параметров пласта от исходного состояния уравнения (2.1) линеаризуются

$$\frac{\partial m'}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial \sigma'^{fe}}{\partial t} - (1 - m_0)\beta_1 \frac{\partial p'_e}{\partial t} - (1 - m_0) \frac{\partial e'}{\partial t} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial m'}{\partial t} + \beta_2 m_0 \frac{\partial p'_e}{\partial t} + m_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rw'_e) = 0. \quad (2.21)$$

Здесь

$$m = m_0 + m',$$

$$e = e_0 + e', \quad p_e = p_k + p'_e \text{ и т.д.}$$

Подставляя (2.19) в уравнение неразрывности твердой фазы (2.20) и интегрируя его, получаем

$$m' = (1 - m_0)(1 - \beta_1 K)(\beta_1 + s)p'_e. \quad (2.22)$$

Уравнение неразрывности жидкой фазы (2.21) с помощью закона Дарси

$$\frac{k_0}{\mu_0} \frac{\partial p'}{\partial r} = -m_0(w'_e - v'_e),$$

$$v'_e = \frac{\partial u'_r}{\partial t}$$

и соотношения (2.22) приводится к виду

$$\frac{\partial p'_e}{\partial t} = \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_e}{k_0} r \frac{\partial p'_e}{\partial r} \right), \quad (2.23)$$

где

$$\chi = \frac{\chi_0}{a + b}, \quad \chi_0 = k_0(1 - m_0)(1 - \nu) \frac{E}{\mu_0},$$

$$b = (1 - \varepsilon)^2 (1 + \nu)(1 + 2\nu),$$

$$a = (1 - m_0)(1 - \nu)[(1 - m_0)(1 - \beta_1 K)\beta_1 + m_0\beta_2].$$

Таким образом, после нахождения из (2.23) p'_e полностью определяются напряженно-деформированные состояния пласта, пористости, коэффициент проницаемости, скорости твердой и жидкой фаз.

2.4. Определение интенсивности выноса твердой фазы породы пласта на стенке скважины.

Интенсивность выноса твердой породы пласта $\bar{Q}_s(t)$ на стенке скважины рассчитывается по (2.14) при учете (2.11)

$$y^n \frac{dy}{dt} = -\frac{\bar{Q}_s(t)k_0}{(1-m_0)m_0' a_0^2 \mu_0}. \quad (2.24)$$

Если воспользоваться (2.13), (2.15), (2.17) и решением (2.23), то из граничных условий (2.7) получаем

$$2G(N_e+1)\left(\frac{a}{r}\right)^n \frac{da}{dt} = \{K_e + 2[(1-\nu)N_e - \nu][\sigma_k^f - (1-Gs)p_k]\} \frac{dR}{dt} + (N_e + 2Gs - 1) \left[p_e(R, t) \frac{dR}{dt} + R \frac{\partial p_e(R, t)}{\partial t} \right], \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} & \bar{Q}_f(t) \int_y^{\bar{R}} \frac{dx}{x^N f^l(x, y)} - \bar{Q}_s(t) \left(\frac{1}{1-m_0} \int_y^{\bar{R}} \frac{dx}{x^{N+n-1} f^{l-1}(x, y)} + \right. \\ & \left. + (1-n) \int_y^{\bar{R}} \frac{\varphi(x, y) dx}{x^N f^l(x, y)} \right) + \\ & + \frac{2(1-Gs)}{N_e+1} \bar{R}^{1-N} [p_k - p_e(R)] = \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$= \left[\frac{K}{N-1} + \frac{2}{N_e+1} \left(\sigma_k^f - \frac{K_e}{2} \right) \right] \bar{R}^{1-N} - \left(\sigma_a^f + \frac{K}{N-1} \right) y^{1-N},$$

где

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 - (1 - m_0) \left[1 + x^{-n-1} (1 - y^{n+1}) \right]^n, \\ \varphi(x, y) &= \int_y^x \left[1 + z^{-n-1} (1 - y^{n+1}) \right]^{-\frac{2n}{n+1}} z^{-n} dz. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Динамика развития давления p на стенке скважины рассчитывается по формуле (2.13), т.е.

$$\begin{aligned} p_a &= -\bar{Q}_f \int_y^{\bar{R}} \frac{dx}{x f'(x, y)} + \\ &+ \bar{Q}_s \left[\frac{1}{1 - m_0} \int_y^{\bar{R}} \frac{dx}{x^n f'^{1-n}(x, y)} + (1 - n) \int_y^{\bar{R}} \frac{\varphi(x, y) dx}{x f'(x, y)} \right] + p_e(\bar{R}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Если в системе (2.24)-(2.26) заданы геометрические и гидродинамические параметры пласта и \bar{Q}_f , то она замкнута относительно неизвестных y , \bar{R} и \bar{Q}_s . Нахождение последних дает возможность вычислить p_a из (2.28). Если известно p_a , то требуется решить совместно систему интегродифференциальных уравнений (2.24) – (2.26), (2.28) относительно y , \bar{R} , \bar{Q}_s и \bar{Q}_f .

Рассмотрим частный случай. Пусть режим работы скважины таков, что в упругом пласте на контуре питания поддерживается постоянное давление (что, например, обеспечивается при разработке месторождения поддержанием давления). Тогда коэффициент продуктивности скважины

при длительной ее работе определяется из уравнения (2.23) ($k = k_0$)

$$p_k - p_e = -\frac{Q_f \mu_0}{2\pi k_0 h} \left(\ln \frac{r}{R_k} + 1,283e^{-5,784 \frac{\bar{\chi} t}{R_k^2}} \right). \quad (2.29)$$

Если начальное давление в пласте постоянное, то при «пуске» скважины с постоянным дебитом депрессия для малых t будет изменяться по формуле

$$p_k - p_e = -\frac{Q_f \mu_0}{2\pi k_0 h} \ln \sqrt{\frac{r^2}{2,25 \chi t}}, \quad (2.30)$$

где $\bar{\chi} t \gg r^2$, а для больших t по формуле

$$p_k - p_e = -\frac{Q_f \mu_0}{2\pi k_0 h} \left(\ln \frac{r}{R_k} + 1,283e^{-5,784 \frac{\bar{\chi} t}{R_k^2}} \right) \quad (2.31)$$

Подставляя (2.29) в (2.25)-(2.28) и переходя к безразмерным величинам, при малых t получим

$$2G(N_e + 1)y^n \frac{dy}{dt} = \bar{R}^n \left\{ \left[K_e + 2((1 - \nu) N_e - \nu) \sigma_k^f - \right. \right. \quad (2.32)$$

$$\left. -2(1 + N_e) \left((1 - \nu)(1 - Gs) - \frac{1}{2} \right) p_k + \right. \\ \left. + A \left(1 + \ln \frac{R}{\sqrt{2,25 \chi t}} \right) \right] \frac{dR}{dt} - \frac{A}{2} \cdot \frac{R}{t} \Bigg\},$$

$$\begin{aligned} & \bar{Q}_f \left(\int_y^R \frac{dx}{x^N f^l(x, y)} - B \bar{R}^{1-N} \ln \frac{\bar{R}}{\sqrt{2,25 \chi t}} \right) - \\ & - \bar{Q}_s \left(\frac{1}{1-m_0} \int_y^R \frac{dx}{x^{N+n-1} f^{l-1}(x, y)} - (1-n) \int_y^R \frac{\varphi(x, y) dx}{x^N f^l(x, y)} \right) = \\ & = \left[\frac{K}{N-1} + \frac{2}{N_e+1} \left(\sigma_k^f - \frac{K_e}{2} \right) \right] R^{1-N} - \left(\sigma_a^f + \frac{K}{n-1} \right) y^{1-N}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{Q}_f \left(\int_y^R \frac{dx}{x f^l(x, y)} - \frac{k_0}{k_e m_0^e} \ln \frac{\bar{R}}{\sqrt{2,25 \chi t}} \right) - \\ & - \bar{Q}_s \left(\frac{1}{1-m_0} \int_y^R \frac{dx}{x^n f^{l-1}(x, y)} + (1-n) \int_y^R \frac{\varphi(x, y) dx}{x f^l(x, y)} \right) = p_k - p_a, \end{aligned}$$

а при больших t

$$\begin{aligned} 2G(N_e+1)y^n \frac{dy}{dt} &= \bar{R}^n \left\{ \left[K_e + 2((1-\nu)N_e - \nu) \sigma_k^f - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2(1+N_e) \left((1-\nu)(1-Gs) - \frac{1}{2} \right) p_k + \right. \right. \\ & \left. \left. + A \left(1 + \ln \frac{\bar{R}}{R_k} + 1,283e^{-5,784 \frac{\bar{\chi} t}{R_k^2}} \right) \right] \frac{d\bar{R}}{dt} - \frac{7,429 A}{\bar{R}_k^2} e^{-5,784 \frac{\bar{\chi} t}{R_k^2}} \bar{R} \right\}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\bar{Q}_f \left[\int_y^{\bar{R}} \frac{dx}{x^N f^l(x, y)} - B \bar{R}^{1-N} \ln \left(\frac{\bar{R}}{R_k} + 1, 283 e^{-5,784 \frac{\bar{\chi}^l}{R_k^2}} \right) \right] -$$

$$\bar{Q}_s \left(\frac{1}{1-m_0} \int_y^{\bar{R}} \frac{dx}{x^{N+n-1} f^{l-1}(x, y)} + (1-n) \int_y^{\bar{R}} \frac{\varphi(x, y) dx}{x^N f^l(x, y)} \right) =$$

$$= \left[\frac{K}{N-1} + \frac{2}{N_e+1} \left(\sigma_k^f - \frac{K_l}{2} \right) \right] \bar{R}^{1-N} - \left(\sigma_a^f + \frac{K}{N-1} \right) y^{1-n};$$

$$\bar{Q}_f \left[\int_y^R \frac{dx}{x f^l(x, y)} - \frac{k_0}{k_e m_o^l} \left(\ln \frac{\bar{R}}{R_k} + 1, 283 e^{-5,784 \frac{\bar{\chi}^l}{R_k^2}} \right) \right] -$$

$$- \bar{Q}_s \left[\frac{1}{1-m_0} \int_y^R \frac{dx}{x^n f^{l-1}(x, y)} + (1-n) \int_y^R \frac{\varphi(x, y) dx}{x f^l(x, y)} \right] = p_k - p_a,$$

где

$$A = \frac{\bar{Q}_f k_0 (N_l + 2Gs - 1)}{k_e m_o^l},$$

$$B = \frac{2(1-Gs)k_0}{(N_l + 1)k_e m_o^l},$$

$$\bar{\chi} = \frac{\bar{\chi}}{a_0^2},$$

$$\Delta p = p_k - p_a.$$

Проведены численные расчеты замкнутой системы интегродифференциальных уравнений (2.24), (2.31) - (2.33), связывающей интенсивность объема выноса твердой породы \overline{Q}_s с радиусами пластической зоны a и R , дебитом жидкости \overline{Q}_f и перепадом давления Δp . Расчеты получены при следующих входных данных:

$$k_0 = 6 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2, \quad k_e = 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2,$$

$$m_0 = 0.2, \quad K = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$K_e = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad p_k = 1.5 \cdot 10^7 \text{ Па},$$

$$\sigma_k^f = -2.5 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad n = 0.8; 1.5; 2; \quad l = 4, \quad N = N_e = 3,$$

$$a_0 = (0.12 - 0.15) \text{ м}, \quad R_k = 200 \text{ м}, \quad R_0 = 0.12 \text{ м},$$

$$\overline{\chi} = 40 \text{ сек}^{-1}, \quad G_s = 0.27, \quad \nu = 0.25, \quad E = 4.02 \cdot 10^9 \text{ Па},$$

$$\overline{Q}_f = (100 \div 1000) \text{ Па}.$$

При различных значениях \overline{Q}_f , для $n=1,5$, полученные данные \overline{Q}_s указаны в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

Интенсивность объема выноса твердой породы \bar{Q}_s

t (час)	\bar{Q}_s		
	$\bar{Q}_f = 200 \text{ Па,}$	$\bar{Q}_f = 300 \text{ Па,}$	$\bar{Q}_f = 400 \text{ Па,}$
1	1,150453	2,496905	4,843087
5	0,238364	0,535492	1,112667
10	0,121145	0,276495	0,596275
15	0,081554	0,187932	0,415409
20	0,061594	0,142933	0,322034
25	0,049545	0,11561	0,264637

При $n > 1$ существуют критические значения \bar{Q}_{fk} , в случае $\bar{Q}_f < \bar{Q}_{fk}$ объем выноса твердой массы в зависимости от времени, быстро уменьшаясь, асимптотически стремится к нулю (рис. 2.1).

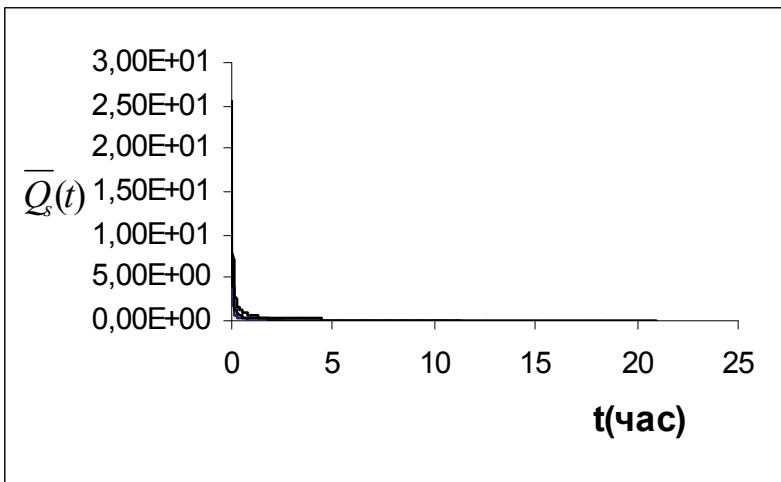


Рис. 2.1. Интенсивность объема выноса твердой породы \bar{Q}_s

В таблице 2.2. даны результаты изменения $R(t)$ и $\Delta p(t)$ при трех значениях \overline{Q}_f и различных значениях времени.

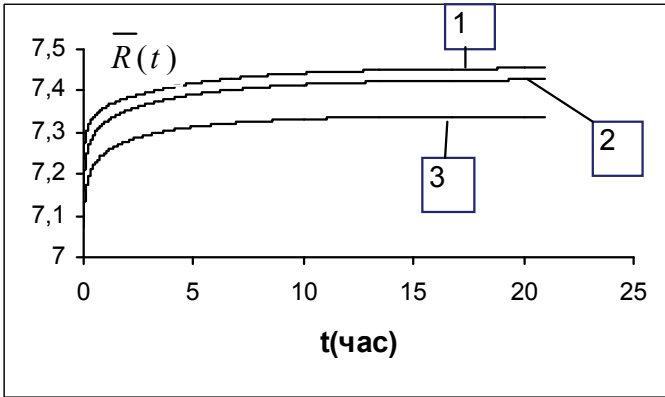
Таблица 2.2.

Результаты изменения радиуса упруго-пластической границы $R(t)$ и давления на стенке скважины $\Delta p(t)$ в зависимости от времени

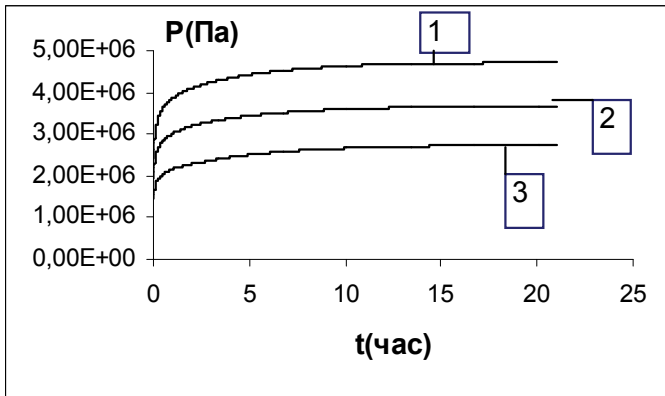
t (час)	$R(t)$			$\Delta p(t)$		
	1	2	3	1	2	3
0,05	7,27	7,20	7,12	1747369,00	2394282,00	3035677,00
1,00	7,36	7,32	7,25	2159042,00	3010101,00	3853572,00
2,00	7,38	7,35	7,28	2282965,00	3195428,00	4099426,00
3,00	7,41	7,37	7,29	2898784,00	3303845,00	4243173,00
4,00	7,43	7,38	7,31	3084111,00	3380773,00	4345126,00
5,00	7,44	7,39	7,31	3192528,00	3439893,00	4423450,00
6,00	7,45	7,40	7,32	3269456,00	3485432,00	4483765,00
7,00	7,46	7,40	7,32	3328576,00	3522413,00	4532732,00
8,00	7,46	7,41	7,33	3374115,00	3552442,00	4572486,00
9,00	7,47	7,41	7,33	3411096,00	3576828,00	4604763,00
10,00	7,47	7,42	7,33	3441125,00	3596630,00	4630968,00
11,00	7,47	7,42	7,33	3465511,00	3612710,00	4652245,00
12,00	7,48	7,42	7,33	3485313,00	3625767,00	4668325,00
13,00	7,48	7,42	7,33	3501393,00	3636371,00	4681382,00
14,00	7,48	7,42	7,33	3514450,00	3644981,00	4691986,00
15,00	7,48	7,42	7,33	3525054,00	3651972,00	4700596,00
16,00	7,48	7,42	7,33	3533664,00	3657650,00	4707587,00
17,00	7,48	7,43	7,33	3540655,00	3662260,00	4713265,00
18,00	7,48	7,43	7,33	3546333,00	3666003,00	4717875,00
19,00	7,48	7,43	7,33	3550943,00	3669043,00	4721618,00
20,00	7,49	7,43	7,33	3554686,00	3671512,00	4724658,00

Здесь 1 обозначает $\overline{Q}_f = 200$ Па,
 2 обозначает $\overline{Q}_f = 300$ Па,
 3 обозначает $\overline{Q}_f = 400$ Па.

На рисунке 2.2 (а,б) кривые 1 соответствует значению $\bar{Q}_f = 200$ Па, кривая 2 – $\bar{Q}_f = 300$ Па, кривая 3 – $\bar{Q}_f = 400$ Па при $n = 1,5$.



а)



б)

Рис. 2.2 (а,б). Изменение радиуса упругопластической границы (а) и давления на стенке скважины (б) в зависимости от времени

В этом случае фильтрация происходит в процессе разуплотнения породы пласта и расширения пластической зоны вокруг скважины.

Однако, изначально при плотной упаковке породы пласта, когда вынос породы начинается после достижения \bar{Q}_f значения \bar{Q}_{fk} и n больше единицы, происходит разрыхление породы в окрестности скважины и быстрый рост \bar{Q}_s .

Для указанных данных при $n = 1.5$, критическое значение $\bar{Q}_f \approx 450 \text{ Па}$. С уменьшением коэффициентов проницаемости критическое значение \bar{Q}_{fk} увеличивается и при $k_0 = 3 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$, $k_e = 10^{-13} \text{ м}^2$, \bar{Q}_{fk} становится равным $\approx 10^3 \text{ Па}$.

Отметим, что продолжительность перепада давления, интенсивность выноса породы $\bar{Q}_s(t)$, расширение пластической зоны во времени зависят от режима работы скважины. Поскольку при заданном распределении давления в упругой зоне процесс фильтрации со временем переходит в стационарное состояние, то $\bar{Q}_s(t)$, $R(t)$ и $\Delta p(t)$ тоже переходят ($\Delta p(t)$ равно $p(t)$) в это состояние (рис. 2.2).

Связь между \bar{Q}_s и \bar{Q}_f показана на рис. 2.3. В случае $n < 1$ пористость пласта сначала велика, но при фильтрации происходит уплотнение разрыхленной породы, приводящее к уменьшению пористости и коэффициента проницаемости, а также к сужению пластической зоны.

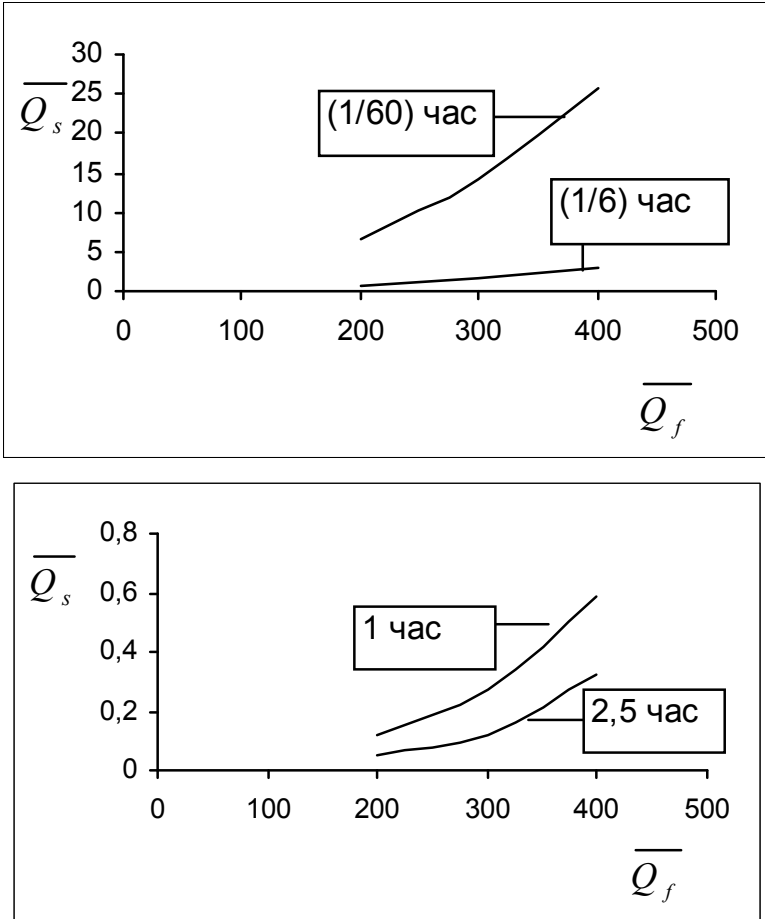


Рис. 2.3. Соотношение дебита скважины \bar{Q}_f и интенсивности выноса твердых фрагментов \bar{Q}_s для разных периодов

2.5. Автомоделное решение задачи при локализации пластической зоны в ближней окрестности забоя скважины.

Приведем еще одно решение этой задачи, предположив заданный рост контура питания. Пусть пластическая зона локализована вблизи забоя центральной скважины, причем дебиты нефти и породы $r=a(t)$ определяются выражениями

$$Q_f = -2 \pi a h m w = const, \tag{2.34}$$

$$Q_s = -2 \pi a h (1 - m) v = const.$$

Пусть на бесконечности $\frac{r}{a} \rightarrow \infty$ выполняются условия покоя, а все параметры пласта равны начальным значениям, независимым от координат

$$p_e = p_0,$$

$$\sigma_{rr}^{f(e)} = -(\Gamma - p_0), \tag{2.35}$$

$$m = m_e^0$$

где Γ – полное горное давление.

При численной реализации эти условия зададим при достаточно большом радиусе, соответствующем реальному радиусу контура питания, растущего пропорционально \sqrt{t} . Считаем, что интенсивность отбора жидкости соответствует реализации плоской деформации матрицы пласта, а радиус

упругопластической зоны $R(t)$ и радиус скважины $a(t)$ будут перемещаться во внешнюю область скважины. При такой постановке необходимо решать задачу с учетом зависимости от времени, т.е.

$$\sigma_{rr}^f = 0 \Rightarrow p = p_a$$

при

$$r = a(t).$$

Считаем, что интенсивность отбора жидкости соответствует реализации плоской деформации матрицы пласта, а радиус упруго-пластической зоны $R(t)$ и радиус скважины $a(t)$ будут перемещаться во внешнюю область скважины.

На границе $R(t)$ должны быть выполнены условия равенства значений давлений и радиальных напряжений, а также скоростей твердых и жидких частиц, относящихся к внутренней пластической и внешней упругой сторонам

$$p_e = p_n,$$

$$\sigma_{rr}^{f(e)} = \sigma_{rr}^{f(n)}, \tag{2.36}$$

$$v_e = v_n,$$

$$w_e = w_n.$$

В упругой области уравнения сохранения масс и баланс сил, действующих в жидкой и твердой фазах, описываются соотношениями (2.1), (2.2).

Обобщенный закон Гука (2.5) для плоской деформа-

ции запишем в виде:

$$\sigma_{rr}^{f(e)} = (K + G) \frac{\partial u_r^e}{\partial r} + (K - G) \frac{\partial u_r^e}{r} + \varepsilon p_e, \quad (2.37)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{f(e)} = (K - G) \frac{\partial u_r^e}{\partial r} + (K + G) \frac{\partial u_r^e}{r} + \varepsilon p_e.$$

Введем новые переменные

$$W = w\sqrt{t}, \quad V = \nu\sqrt{t},$$

$$U = \frac{u_r^e}{\sqrt{t}}, \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{t}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2t} \xi \frac{d}{d\xi}, \quad (2.38)$$

$$V = \frac{1}{2} \xi \frac{dU}{d\xi} + \frac{1}{2} U.$$

Если пренебречь сжимаемостью фаз, то система уравнений (2.1), (2.2) и (2.37) для упругой области в автономной переменной примет вид

$$\frac{dm_e}{d\xi} = \frac{\mu_0(1-\varepsilon)(m_e-1)m_e}{k_e(K+G)(\xi-2V_e)} \xi(W_e-V_e),$$

$$\frac{dW_e}{d\xi} = \frac{\mu_0(1-\varepsilon)(m_e-1)\xi(\xi-2W_e)}{2k_e(K+G)(\xi-2W_e)}(W_e-V_e) - \frac{W_e}{\xi}, \quad (2.39)$$

$$\frac{dV_e}{d\xi} = \frac{\mu_0(1-\varepsilon)\xi}{2k_e(K+G)} m_e(W_e-V_e) - \frac{V_e}{\xi},$$

$$\frac{dp_e}{d\xi} = -\frac{\mu_0}{k_e} m_e(W_e-V_e) \quad (2.40)$$

$$\frac{d\sigma_{rr}^{f(e)}}{d\xi} = 4G \frac{V_e}{\xi^2} - \frac{\mu_0}{k_e} m_e(W_e-V_e). \quad (2.41)$$

Внутри пластической зоны уравнение (2.3) и уравнение равновесия твердого скелета (2.2) с помощью соотношения (2.5) в автомодельной переменной имеют следующие формы:

$$\frac{dV_n}{d\xi} = -n \frac{V_n}{\xi},$$

$$\frac{d\sigma_{rr}^{(n)}}{d\xi} = -\frac{\sigma_{rr}^{f(n)}(1-N_n)+K_n}{\xi} - \frac{\mu_0 m_n}{k_n}(W_n-V_n) \quad (2.42)$$

Закон фильтрации (2.40) относительно движущейся матрицы и уравнения неразрывности фаз (2.39) не меняют своего вида.

На растущей упругопластической границе ξ_R упру-

гое эффективное напряжение должно удовлетворять условию текучести (2.4). Отсюда

$$\sigma_{rr}^{f(l)} = \frac{1}{N_e - 1} \left(4G \frac{V_e}{\xi} + K_e \right), \quad (2.43)$$

Рассматриваемая задача решалась численно методом Рунге-Кутты [8]. После определения p_e из (2.40) последовательно находились $V_e, m_e, W_e, \sigma_{rr}^{f(e)}$ и $\sigma_{\theta\theta}^{f(e)}$ в упругой области. Потом аналогично была решена задача в пластической зоне: $p_n, V_n, m_n, W_n, \sigma_{rr}^{f(n)}$ и $\sigma_{\theta\theta}^{f(n)}$.

Решение соответствующей задачи имеет физический смысл только при $a(t) < a_0$, где a_0 - реальный радиус скважины. Дебиты жидкости и песка определялись по скоростям фильтрации и смещения разрушенной матрицы в пластической зоне, расширяющейся в результате дилатансионного разрыхления. Для простоты расчетов принято, что из-за произошедшего разрушения значение сцепления K_e равно сцеплению в пластической зоне.

Зависимости искомых параметров от безразмерной переменной $z = \frac{\xi}{\xi_a}$ на логарифмической координате изображены на рис. 2.4 (а, б).

Расчет проведен на основании следующих данных:

$$\begin{aligned} m_0 &= 0.3; k_0 = 10^{-13} \text{ м}^2, \\ p_0 &= 5 \text{ МПа}; p_R = 16 \text{ МПа}; G_f = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}; G_s = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}; \\ K_e &= K_n = 2.4 \text{ МПа}; \\ \sigma_{rr0}^f &= -20 \text{ МПа}; \beta_1 = 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}; \mu = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}; \\ v &= 0.25, n = 1.1, N_e = N_n = 3. \end{aligned}$$

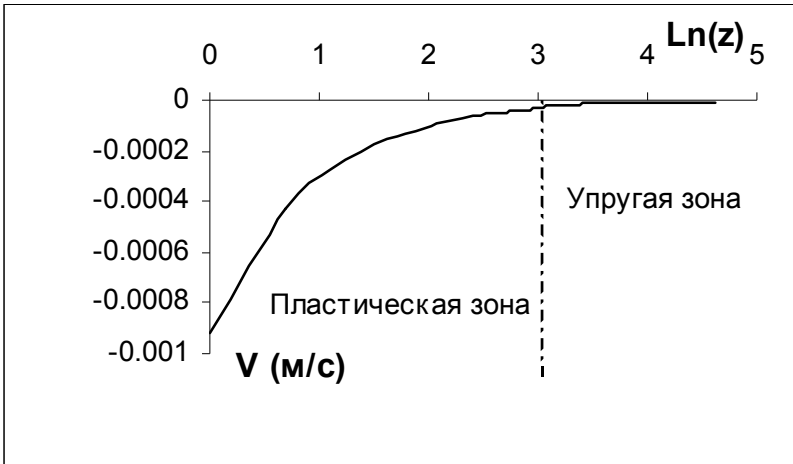


Рис. 2.4 (а). Зависимость распределения скоростей твердых фрагментов пласта от параметра $z = \frac{\xi}{\xi_a}$.

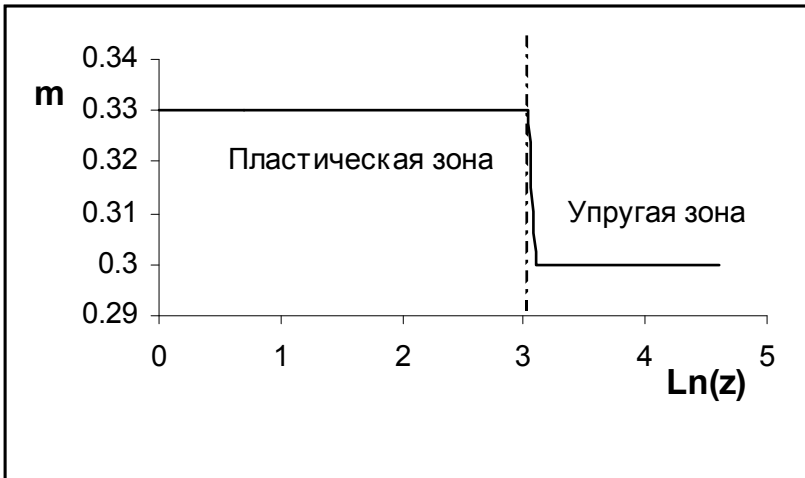


Рис. 2.4 (б). Зависимость пористости пласта от безразмерного параметра $z = \frac{\xi}{\xi_a}$.

По мере приближения к скважине пористость (рис. 2.4 б)), в упругой зоне, незначительно уменьшаясь, скачком переходит упругопластическую границу, а в пластической зоне значение пористости пласта, увеличенное в результате разрыхления породы, уменьшается за счет сжимаемости матрицы при перепаде порового давления.

Распределение скорости жидкой и твердой фаз дано на рис. 2.4 а). В этой координате распределение давления подчиняется почти линейному закону.

$$\sigma_{rr}^{-ff} = \frac{\sigma_{rr}^{-f}}{K_e},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{-ff} = \frac{\sigma_{\theta\theta}^{-f}}{K_e}.$$

Абсолютное значение безразмерного радиального эффективного напряжения σ_{rr}^{-ff} непрерывно увеличивается, однако, кольцевое напряжение $\sigma_{\theta\theta}^{-ff}$ на границе скачком переходит в упругую зону.

Глава III.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДИЛАТАНСИИ ПОРОДЫ НА ПРОЦЕСС ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ГАЗОВОЙ СКВАЖИНЫ

Твердые фрагменты слабосцементированного пласта могут проникать в скважину без фильтрации и при наличии фильтрационного потока. На практике при разработке нефтегазовых месторождений это явление обычно объясняется воздействием гидродинамической силы на структурные изменения скелета пласта. Если эта сила превосходит силы сцепления между частицами, тогда разрушаются структурные связи скелета пласта и происходит вымывание (суффузия) [17, 27, 73].

С другой стороны, в слабосцементированных газовых месторождениях перепад пластового давления больше, чем в нефтяных. При этом газ сильно сжимается вблизи эксплуатационной скважины и возникновение неустойчивой зоны приводит к интенсивному выносу твердых фрагментов пласта в скважину. Поэтому представляет интерес изучение развития упругопластической границы и определение гидродинамических параметров пласта при первоначальном понижении пластового давления в бесконечном пласте для случая работы скважины с постоянным дебитом.

3.1. Неустановившаяся осесимметричная фильтрация идеального газа к мгновенно включенной с постоянным дебитом скважине

Постановка задачи.

Рассмотрим неустановившуюся осесимметричную фильтрацию баротронного газа к мгновенно включенной с постоянным дебитом скважине. Предполагается, что пластическая область локализована в забое скважины, а процесс фильтрации с выносом твердых фрагментов вызывается линейным стоком. Условия интенсивности линейного стока для каждой фазы будем задавать на достаточно малом радиусе $a(t)$ условной скважины $a(t) < a_0$

$$\begin{aligned} Q_f &= -2\pi a h m w = const, \\ Q_s &= -2\pi a h (1 - m) v = const. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для нахождения радиуса условной скважины будем использовать равенство нулю радиального эффективного напряжения на ее забое

$$\sigma_{rr}^f = 0 \rightarrow p = p_a, \quad r = a(t). \quad (3.2)$$

На бесконечности все параметры пласта равны первоначальным значениям

$$\begin{aligned} p &= p_0, \\ \sigma_{rr}^{f(0)} &= -(\Gamma - p_0), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$m = m_e^0$$

Дискретизация этих граничных условий осуществляется на достаточно большом радиусе, в котором радиус возмущенной области (расширение контура питания) растет пропорционально \sqrt{t} [19].

$$R(t) = \sqrt{2\eta t}, \quad \eta = \frac{k_e}{\mu\beta_*}, \quad (3.4)$$

где k_e - абсолютный коэффициент проницаемости упругого пласта,

μ - динамическая вязкость газа,

β_* - коэффициент упругоёмкости пласта.

Пусть в неограниченном пласте постоянной толщины h в момент $t = 0$ пущена добывающая газовая скважина и возникающая при $t > 0$ упруго-пластическая область с радиусом $b(t)$, а также радиус скважины $a(t)$ перемещаются на внешнюю сторону.

Запишем уравнения баланса сил для газовой и твердой фаз во внутренней пластической области ($a(t) \leq r \leq b(t)$) пласта [78, 75].

$$\frac{\partial p_n}{\partial r} = -\frac{\mu}{k_n} m_n (w_n - v_n), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{f(n)}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^{f(n)} - \sigma_{\theta\theta}^{f(n)}}{r} - \frac{\partial p_n}{\partial r} = 0,$$

уравнения сохранения масс

$$\frac{\partial m_n \rho_f}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r m_n \rho_f w_n) = 0,$$

$$\frac{\partial(1-m_n)\rho_s}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(1-m_n)\rho_s v_s) = 0, \quad (3.6)$$

кинематическое соотношение дилатансии

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + n \frac{v_n}{r} = 0 \quad (3.7)$$

и условие пластического течения матрицы пласта

$$N\sigma_{rr}^{f(n)} - \sigma_{\theta\theta}^{f(n)} = K_n. \quad (3.8)$$

Во внешней упругой области $b(t) \leq r \leq R(t)$ выполняются те же уравнения (3.5) и (3.6), но кинематическое условие дилатансии (3.7) и условие пластического течения заменяются обобщенным законом Гука [73].

$$\sigma_{rr}^{f(e)} = (K + G) \frac{\partial u_e}{\partial r} + (K - G) \frac{u_e}{r} + \varepsilon p_e, \quad (3.9)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{f(e)} = (K - G) \frac{\partial u_e}{\partial r} + (K + G) \frac{u_e}{r} + \varepsilon p_e.$$

Здесь индексы « n » и « e » относятся, соответственно, к пластической и упругой зоне;

w , v – истинные скорости газа и твердой частицы;

p – пластовое давление;

σ_{ij}^f – эффективные напряжения;

m , k – пористость и коэффициент проницаемости пласта;

G , K – модуль сдвига и коэффициент объемного сжа-

тия сухого пористого пласта;

$\varepsilon = \beta_1 K$ - коэффициент сжимаемости матрицы пласта;

u – радиальное смещение твердых частиц;

$$n = 1 + \frac{2\Lambda(3\Lambda + \sqrt{3(3 - \Lambda^2)})}{(3 - 4\Lambda^2)};$$

где Λ - скорость дилатансии, которая при $\Lambda > 0$ характеризует разрыхление плотной матрицы пласта, при $\Lambda < 0$ - уплотнение рыхлой матрицы, а при $\Lambda = 0$ несжимаемость породы,

$$K_n = \frac{2Y_n \sin \varphi}{\alpha(1 - \sin \varphi)},$$

$$N_n = \frac{(1 + \sin \varphi)}{(1 - \sin \varphi)},$$

где α , Y_n - коэффициенты внутреннего трения и сцепления, φ – угол внутреннего трения.

Считаем, что газ является баротропным, а плотность твердой фазы постоянна

$$\rho_f = \frac{\rho_{at}}{\rho_{at}} \rho, \tag{3.10}$$

$$\rho_s = const.$$

На границе $b(t)$, разделяющей пластическую область от упругой, должны быть выполнены условия непрерывно-

сти давлений, радиальных напряжений, скоростей твердых и газовых частиц

$$P_n = P_e,$$

$$\sigma_{rr}^{f(n)} = \sigma_{rr}^{f(e)}, \tag{3.11}$$

$$v_n = v_e,$$

$$w_n = w_e$$

Присутствующее в вышеуказанных уравнениях и условиях напряжение и давление включают в себя все действующее напряжение и давление в пласте, т.е. начальное и генерируемое при пуске скважины. Если упругое эффективное напряжение на некотором радиусе удовлетворяет условию Мора-Кулона (3.8), то этот радиус $b(t)$ будет внешней границей пластической области.

3.2. Автомодельное решение

Осесимметричная задача (3.1)-(3.10) является автомодельной и поэтому введем автомодельную переменную

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{t}} \text{ и новые функции } W = \frac{w}{t}, V = \frac{v}{t}, U = \frac{u}{t}. \text{ Тогда иско-$$

мые функции удовлетворяют обыкновенные дифференциальные уравнения. Если подставить (3.9) во второе уравнение (3.5) и в (3.6), то уравнения (3.5) и (3.6) в упругой области $\xi_b \leq \xi \leq \xi_R$ в автомодельной переменной примут вид [28]:

$$\frac{dp_e}{d\xi} = -\frac{\mu}{k_e} m_e (W_e - V_e), \quad (3.12)$$

$$\frac{dV_e}{d\xi} = \frac{\mu(1-\varepsilon)}{2k_e(K+G)} \xi m_e (W_e - V_e) - \frac{V_e}{\xi}, \quad (3.13)$$

$$\frac{dW_e}{d\xi} = \frac{\xi - 2W_e}{2m_e p_e} \frac{d(m_e p_e)}{d\xi} - \frac{W_e}{\xi}, \quad (3.14)$$

$$\frac{dm_e}{d\xi} = \frac{\mu(1-\varepsilon)(m_e - 1)}{k_e(K+G)(\xi - 2V_e)} \xi m_e (W_e - V_e) \quad (3.15)$$

Дифференцируя первое уравнение (3.9) по t с учетом закона фильтрации газа (3.5), переходим к новым переменным:

$$\frac{d\sigma_{rr}^{f(e)}}{d\xi} = 4G \frac{V_e}{\xi^2} - \frac{\mu}{k_e} m_e (W_e - V_e), \quad (3.16)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{2t} \xi \frac{d}{d\xi},$$

$$V_e = -\frac{1}{2} \xi \frac{dU}{d\xi} + \frac{1}{2} U.$$

В пластической зоне ($\xi_a \leq \xi \leq \xi_b$) уравнения состояния (3.10) и движения газа (3.12), неразрывности фаз (3.14), (3.15), условие текучести (3.8) при новых переменных не изменяют свою форму, а уравнения движения матрицы (3.5) с помощью (3.8) и (3.7) принимают вид

$$\frac{d\sigma_{rr}^{f(n)}}{d\xi} = -\frac{\sigma_{rr}^{f(n)}(1-N_n)+K_n}{\xi} - \frac{\mu}{k_n} m_n (W_n - V_n), \quad (3.17)$$

$$\frac{dV_n}{d\xi} = -n \frac{V_n}{\xi}. \quad (3.18)$$

Упругопластическая граница определяется из условия текучести (3.8), которое выражается упругим эффективным напряжением $\sigma_{rr}^{f(e)}$ и скоростью V_e :

$$\frac{d\sigma_{rr}^{f(e)}}{d\xi} = \frac{1}{N_e - 1} \left(4G \frac{V_e}{\xi} + K_n \right). \quad (3.19)$$

В автомодельной постановке задача приводится к стационарному решению в пространстве ξ , граничные условия (3.2), (3.3), (3.11) сохраняют свою форму, а (3.1) запишем в виде:

$$Q_f = -2\pi h \xi_a m_a W_a = const, \quad (3.20)$$

$$Q_s = -2\pi h \xi_a (1 - m_a) V_a = const.$$

В переменной ξ начальные условия и условия в бесконечности $\xi \rightarrow \infty$ совпадают. В упругой $\xi_b \leq \xi \leq \xi_R$ ($p_e, W_e, V_e, m_e, \sigma_{rr}^{f(e)}$) (3.12)-(3.16) и пластической $\xi_a \leq \xi \leq \xi_b$ ($p_n, W_n, V_n, m_n, \sigma_{rr}^{f(n)}$) (3.12), (3.14), (3.15), (3.17), (3.18) областях эти системы уравнений замкнуты относительно искомых переменных. После определения этих переменных из второго уравнения (3.9), (3.8) и (3.10) соответ-

ственно находятся $\sigma_{\theta\theta}^{f(e)}, \sigma_{\theta\theta}^{f(n)}, \rho_f^{(e)}, \rho_f^{(n)}$.

Поставленная задача решена численным методом Рунге-Кутта. Решение задачи имеет физический смысл только при соблюдении условия $a(t) \leq a_0$ (a_0 – реальный радиус скважины). Из определения (3.4) видно, что (3.3) выполняется при $\xi_R = \sqrt{2\eta}$ и в пространстве автомодельной переменной на скважине и на контуре питания ставятся те же граничные условия, что и в стационарной задаче.

При численной реализации критерий (3.8) проверялся на каждом шаге вычислений и на контуре питания газа скорость твердых частиц выбиралась так, чтобы выполнялось условие $\sigma_{rr}^{f(n)}$ при $\xi = \xi_a$.

В упругой области контур питания принимается за начало границы сетки. Сначала из уравнения (3.12) определяется p_e , потом последовательно находят $V_e, m_e, W_e, \sigma_{rr}^{f(e)}$ и $\sigma_{\theta\theta}^{f(e)}$. После определения ξ_b из (3.19) аналогично решается задача в пластической зоне. Дебит газа и интенсивность выноса твердых частиц скважины при пластическом течении матрицы пласта вычисляются по скоростям фаз W_n и V_n .

Результаты вычисления представлены на рис. 3.1 – рис. 3.5.

Расчеты проведены для следующих параметров пласта и газа:

$$\begin{aligned} m_e^0 &= 0,3; \nu = 0,25, \\ N_e = N_n &= 3, n = 1,5, k_e = k_n = 10^{-13} m^2, a_0 = 0,1, \\ m, h &= 10m, \mu = 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, K_e = K_n \\ &= 3,85 \cdot 10^5 \text{ Па}, \beta_1 = 10^{-11} \text{ Па}^{-1}, \\ E &= 10^{10} \text{ Па}, \sigma_a^f = 0, \sigma_{rr}^{f(0)} = -5 \cdot 10^7 \text{ Па}, p_0 = 10^7 \text{ Па}, \eta = 2,1 \cdot 10^{-2} m^2 / \text{с}. \end{aligned}$$

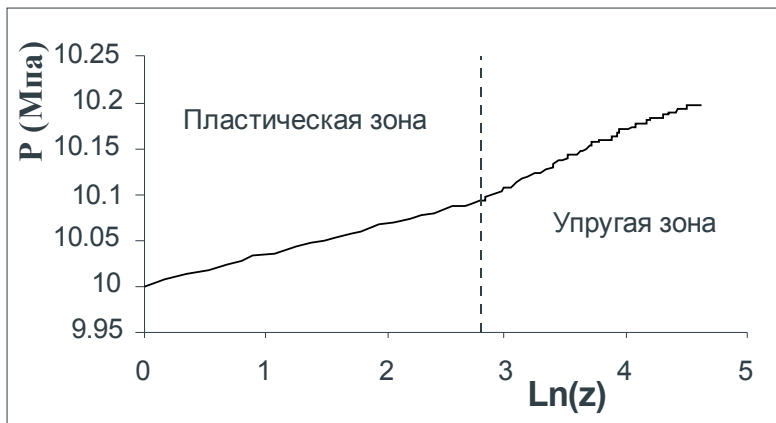


Рис. 3.1. Распределение давления в пластической и упругой зонах

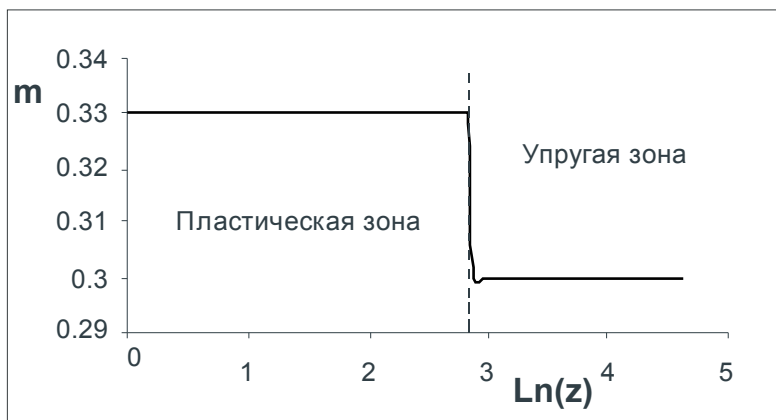


Рис. 3.2. Распределение пористости в пластической и упругой зонах

Из результатов, приведенных на рис. 3.1 и рис. 3.2, видно, что изначально плотная упаковка породы пласта, разрыхляясь, развивает пластическую зону вокруг скважины. В логарифмической координате $\ln z$ пластовое давление и пористость практически не изменяются в пластической зоне. Однако при переходе их пластической зоны в упругую пористость уменьшается скачкообразно и ее рост не заметен.

Из рис. 3.3 и 3.4 видно, что вблизи скважины существенно увеличиваются скорости газа и твердых частиц, которые требуют необходимость учета этих факторов при эксплуатации пласта скважиной.

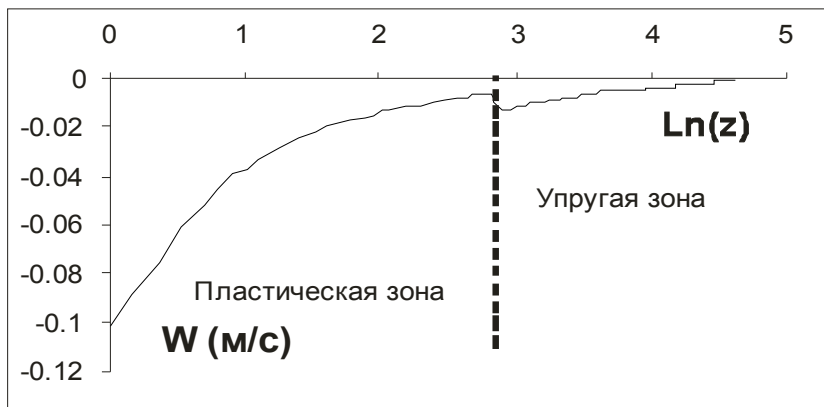


Рис. 3.3. Изменение скорости газа

Кольцевое эффективное напряжение $\sigma_{\theta\theta}^{f(n)}$ значительно падает по сравнению с радиальным $\sigma_{rr}^{f(n)}$ вплоть до границы ξ_b , но при переходе в упругую зону оно скачком восстанавливается и асимптотически стремится к $\sigma_{rr}^{f(e)}$ (рис. 3.5).

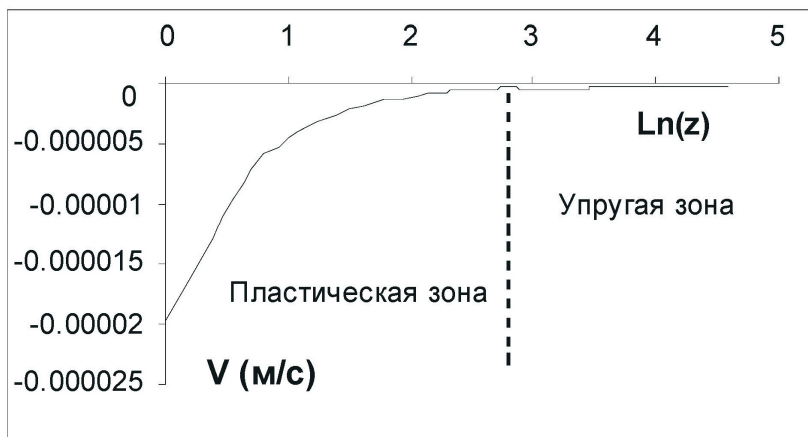


Рис. 3.4. Изменение скорости твердых частиц

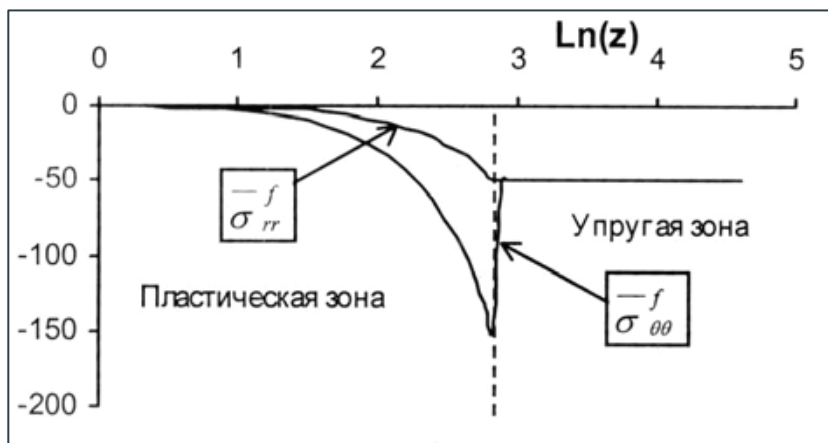


Рис. 3.5. Изменение эффективного напряжения

Таким образом установлено, что главными причинами выноса песка из пласта являются разрушение вследствие дилатанции призабойной зоны, образование каналов и карверн, обрушение их стенок и вышележащих пород.

Основные факторы, влияющие на интенсивность выноса песка, – это глубина залегания пласта, уплотняемость и состояние поверхности забоя, депрессия на пласт, пластовое давление, ухудшение проницаемости, дебит скважины.

В практике добычи флюида применяются различные методы борьбы с выносом песка, включая механические и химические методы укрепления песка путем установки различного вида фильтров и закачки химических реагентов. Поэтому для установки блочных скважинных фильтров требуется не только определить размер пластической области, но и гидродинамические параметры и напряженно-деформированное состояние вокруг эксплуатационной скважины.

3.3. Установившееся движение идеального газа в зонально-однородном дилатансионно-пластическом и упругом круговом пласте

Рассмотрена стационарная фильтрация идеального газа в зонально дилатансионно-пластической и упругой пористой среде в центральную скважину. Определены фильтрационные параметры пласта в кольцевой пластической зоне вокруг скважины и распределения порового давления вдоль пласта. С учетом дилатансионного изменения пористости и коэффициента проницаемости найдена продуктивность скважины.

Изучение распределения порового давления и потока флюида в дилатансионно-пластических пластах представляет большой интерес для изучения проблемы устойчивости призабойной зоны скважины. Течение твердых фрагментов

из пластической зоны пласта в скважину нарушает ее нормальный режим работы, приводит к образованию каверн в призабойной зоне и песчаных пробок в скважине. Для предотвращения выноса песка, обвала призабойной зоны и смятия колонки скважины, а также утолщения пластов, приведенные к оседанию дневной поверхности территории месторождений нуждаются в более простых постановках решения задач о пластических разрушениях пористых сред при фильтрации флюида.

Фильтрация флюида в упругих и вязкоупругих пористых средах в литературе достаточно хорошо изучена [2, 9, 21, 24, 32, 34 и др].

В упрощенных постановках решены некоторые осесимметричные задачи фильтрации несжимаемой жидкости в упругопластических пластах и установлена связь между расходами жидкой и твердой фаз [23, 60, 72, 73, 75].

1. Постановка задачи.

Пусть порода пласта вокруг действующей скважины во внутренней кольцевой зоне с радиусом R подвергается дилатансионно-пластической деформации, а во внешней зоне – линейно-упругой. На контуре питания R_k ($R_k \gg R$) поддерживается постоянное пластовое давление P_0 , а на стенке скважины радиусом R_c радиальное эффективное напряжение и поровое давление P_c меньше соответствующих контурных напряжения и давления. Эффективные напряжения удовлетворяют то условие текучести, при котором вокруг скважины реализуется только одна пластическая зона.

Для стационарного случая в пластической зоне уравнения сохранения масс твердой и жидкой фаз в плоскорадиальном пласте имеют вид:

$$\frac{d}{dr} [r(1-m)\rho_1 v_1] = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{d}{dr} [rm\rho_2 v_2] = 0.$$

Здесь m – пористость пласта,
 v_1, v_2 - компоненты истинных скоростей
твердой и газовой фаз,
 ρ_1, ρ_2 плотности материала матрицы и газа.

Уравнение состояния идеального газа, которым будем пользоваться в дальнейшем, записывается в виде

$$\rho_2 = \frac{\rho_{at}}{p_{at}} p, \quad (3.22)$$

Фильтрация газа при $v_2 \gg v_1$ описывается законом Дарси

$$v_2 = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr}. \quad (3.23)$$

В формулах (3.22) и (3.23) ρ_{at} - плотность газа при атмосферном давлении p_{at} , k – коэффициент проницаемости в пластической зоне, μ – динамическая вязкость газа.

Кинематическая связь между скоростями объемной деформации и сдвига матрицы пласта принимает вид [61]

$$\frac{dv_1}{dr} + n \frac{v_1}{r} = 0, \quad (3.24)$$

где

$$n = 1 + \frac{2\Lambda \left(3\Lambda - \sqrt{3(3 - \Lambda^2)} \right)}{3 - 4\Lambda^2}. \quad (3.25)$$

Λ - скорость дилатансии.

При $n > 1$ происходит разрыхление матрицы пласта, при $n < 1$ ее уплотнение, а при $n = 1$ соответствует критическому состоянию матрицы (несжимаемость матрицы пласта). Коэффициент проницаемости пласта на основе экспериментальных данных может быть задан степенной функцией пористости [56].

$$k = k_0 \left(\frac{m}{m_0} \right)^l; \quad (3.26)$$

$$l = \frac{a_k}{a_m},$$

где k_0 , m_0 -соответствуют начальным значениям порового давления p_0 ; a_k , a_m –коэффициенты, определяемые при обработке экспериментальных данных.

В упругой зоне при установившейся фильтрация газа распределение давления определяется из следующего уравнения [19, 50]

$$\frac{d^2 p_e}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_e}{dr} = 0, \quad R < r < R_k. \quad (3.27)$$

Граничные условия. На стенке скважины задано поровое давление

$$p(r) = p_e(r) \text{ при } r = R. \quad (3.28)$$

На упругопластической границе должны быть выполнены условия неразрывности поровых давлений и скоростей фильтраций

$$p(r) = p_e \text{ при } r = R_c, \quad (3.29)$$

$$\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{k_e}{\mu} \frac{dp_e}{dr} \text{ при } r = R_c. \quad (3.30)$$

На контуре пластической зоны пористость пласта принимает свое критическое значение

$$m(r) = m_R \text{ при } r = R. \quad (3.31)$$

В зоне течения разрушенной массы интегрирование уравнения (4) приводит к кинематическому интегралу

$$v_1 = \frac{C}{r^n}. \quad (3.32)$$

Подставляя (3.32) в уравнение неразрывности твердой фазы (3.21) и интегрируя его при граничном условии (3.31), получаем

$$m = 1 - (1 - m_R) \frac{\rho_1(R)}{\rho_1(r)} \left(\frac{r}{R} \right)^{n-1}, \quad R_c \leq r \leq R. \quad (3.33)$$

Если считать плотность материала матрицы постоянным, то из (3.33) имеем:

$$m = 1 - (1 - m_R) \left(\frac{r}{R} \right)^{n-1}, \quad R_c \leq r \leq R. \quad (3.34)$$

Из уравнения неразрывности газовой фазы (3.21) с учетом (3.22) следует

$$v_2 = C_1 \frac{p_{am}}{m \rho_{am}} \frac{1}{rp}. \quad (3.35)$$

Подставляя (3.35) в закон фильтрации (3.23) с учетом (3.26) для определения функции давления в области $R_c \leq r \leq R$, приходим к уравнению

$$p \frac{dp}{dr} = - \frac{C_1 p_{am} \mu m_0^l}{\rho_{am} k_o} \frac{1}{r [m(r)]^{l+1}}. \quad (3.36)$$

Решение уравнения (3.36) имеет вид:

$$p^2(r) = - \frac{2C_1 p_{am} \mu m_0^l}{\rho_{am} k_o} \int_r \frac{dr}{r [m(r)]^{l+1}} + C_2 \quad (3.37)$$

где C_2 и C_3 – постоянные интегрирования.

Дважды интегрируя уравнение (3.27) получаем:

$$p_e^2(r) = C_3 \ln r + C_4. \quad (3.38)$$

Используя граничные условия (3.28)-(3.30) и условия на контуре питания с учетом (3.34), определяем постоянные интегрирования C_1 , C_2 , C_3 и C_4 . После подстановки их выражения в (3.37) и (3.38) имеем:

$$p(r) = \sqrt{p_c^2 + \frac{m_R m_0' k_e (p_0^2 - p_c^2) f(R_c, r)}{m_R m_0' k_e f(R_c, R) + k_0 \ln \frac{R_k}{R}}}, \quad R_c \leq r \leq R, \quad (3.39)$$

$$p_e(r) = \sqrt{p_0^2 + \frac{k_0 (p_0^2 - p_c^2) \ln \frac{R_k}{r}}{m_R m_0' k_e f(R_c, R) + k_0 \ln \frac{R_k}{R}}}, \quad R \leq r \leq R_k, \quad (3.40)$$

где

$$f(R_c, r) = - \int_{R_c}^r \frac{dx}{x \left[1 - (1 - m_R) \left(\frac{x}{R} \right)^{n-1} \right]^l},$$

$$f(R_c, R) = \int_{R_c}^R \frac{dx}{x \left[1 - (1 - m_R) \left(\frac{x}{R} \right)^{n-1} \right]^l}.$$

Массовый дебит скважины определяется равенством

$$G = - \frac{2\pi R_c h \rho_{am} k}{\mu p_{am}} p \frac{dp}{dr} \quad \text{при } r = R_c. \quad (3.41)$$

Посредством элементарных преобразований из (3.39) и (3.41) получим

$$G^* = \frac{\pi k_0 h \rho_{am} m_R k_e (p_0^2 - p_c^2)}{\mu p_{am} \left[1 - (1 - m_R) \left(\frac{R_c}{R} \right)^{n-1} \right]^l \left[m_R m_0' k_e f(R_c, R) + k_0 \ln \frac{R}{R_k} \right]}. \quad (3.42)$$

На основе полученного решения (3.39), (3.40) и по формуле (3.42) составлена компьютерная программа для расчетов, которая реализуется при следующих данных:

$$\begin{aligned}
 n &= 0.95; 0.98; 1.0; 1.05; 2.0; \quad R = (0.5; 1.7; 3.0) \text{ м}; \\
 l &= 1; 2; 2.5; 4; \quad h = 10 \text{ м}; \quad R_c = 0.1 \text{ м}; \quad R_k = 100 \text{ м}; \\
 m_R &= 0.3; \quad m_0 = 0.2; \quad k_0 = 10^{-13} \text{ м}^2; \\
 k_e &= 0.5 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2; \quad \mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}; \quad p_{am} = 10^5 \text{ Па}.
 \end{aligned}$$

Результаты расчетов представлены в виде кривых распределения давления и дебита скважины, часть из которых приведена, соответственно, на рис. 3.6; 3.7 и 3.10.

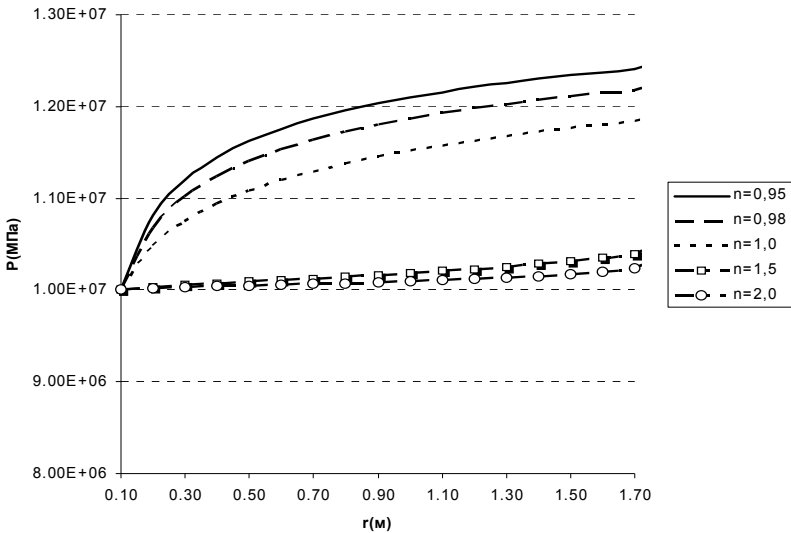


Рис. 3.6. Распределение давления в дилатансионно-пластической зоне пласта при $l=2$; $R=1.7$; $R_c \leq r \leq R$

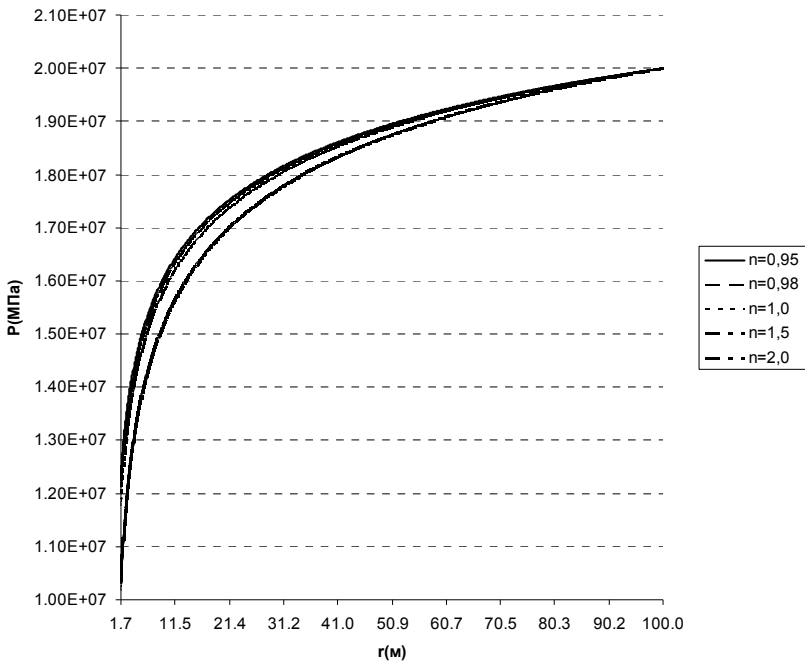


Рис.3.7. Распределение давления в упругой зоне пласта при $l=2$; $R=1.7$; $R \leq r \leq R_k$

Анализ кривых показывает, что в отличие от упругой зоны $r \in [R, R_k]$ (рис.3.7) кривые давления в дилатансионно-пластической зоне $r \in [R_c, R]$ будут изогнутыми (рис. 3.6).

При малых значениях n ($0.95 \leq n \leq 1$) давление в координатах изменяется гораздо более интенсивно, чем при его больших значениях. Уплотнение матрицы в дилатансионно-пластической зоне пласта влечет за собой увеличение давления. Так, например, при фиксированных значениях R и l уменьшение параметра « n » с двух до 0.95 приводит к увеличению порового давления на $(9 \div 17)\%$.

В упругой зоне $r \in [R, R_k]$ наблюдается обратная картина (рис. 3.7). При тех же данных проведены расчеты по формулам (3.26) и (3.34) для изменения пористости и проницаемости в дилатансионно-пластической зоне пласта, результаты которых представлены на рис. 3.8 и 3.9.

Кривые, представленные на рисунках 3.9 и 3.10 показывают, что разрыхление матрицы в области дилатансионно-пластической зоны пласта приводит к увеличению проницаемости, которое влечет за собой увеличение дебита скважины на 43%.

В случаях уплотнения матрицы пласта по сравнению с ее несжимаемостью массовые дебиты скважины дает существенно заниженные прогнозные оценки.

Зададим массовый дебит G газовой скважины и поровое давление на контуре питания:

$$G^* = -\frac{2\pi R_c h \rho_{am} k}{\mu p_{am}} p \frac{dp}{dr}, \quad (3.43)$$

$$p = p_a \quad \text{при} \quad r = R_k. \quad (3.44)$$

Используя граничные условия (3.29), (3.30), (3.33) и (3.34), находим

$$p = \sqrt{\frac{G\mu_0 p_{at}}{\pi h \rho_{at}} \left[\frac{m_0^l}{k_0} f(r, R) + \frac{1}{k} \ln \frac{R_k}{R} \right] + p_k^2}, \quad R_c \leq r \leq R, \quad (3.45)$$

$$p = \sqrt{\frac{G\mu_0 p_{at}}{\pi h \rho_{at}} \ln \frac{R_k}{r} + p_k^2}, \quad R \leq r \leq R_k. \quad (3.46)$$

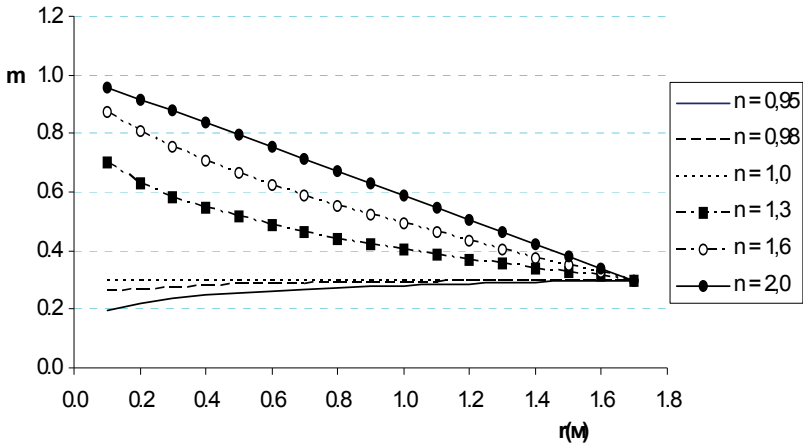


Рис. 3.8. Изменение пористости пласта в дилатансионно-пластической зоне при $l=2$; $R=1.7$; $R_c \leq r \leq R$

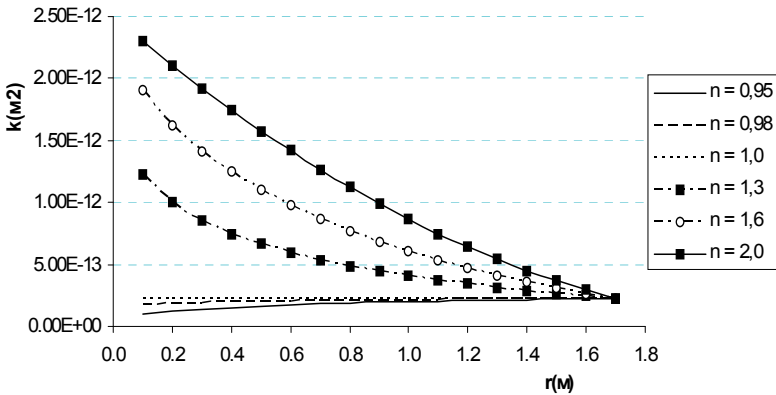


Рис. 3.9. Изменение коэффициента проницаемости пласта в дилатансионно-пластической зоне при $l=2$; $R=1.7$; $R_c \leq r \leq R$.

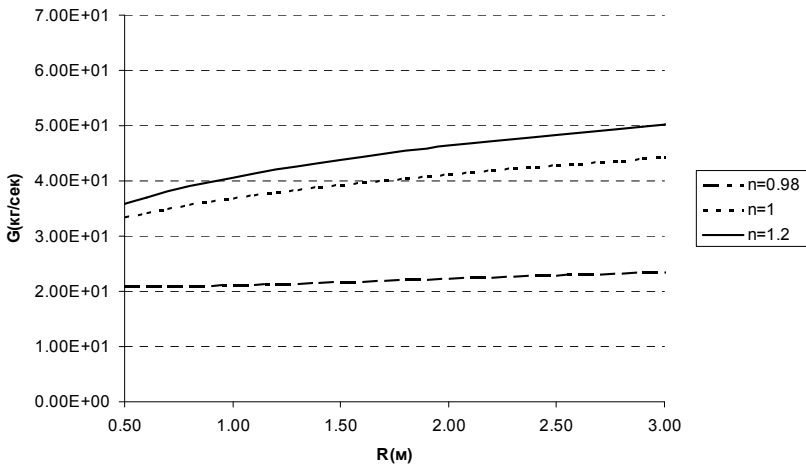


Рис. 3.10. Зависимость массового дебита скважины от радиуса дилатансионно-пластической зоны при $l=2$.

Формулы для скоростей фильтрации при радиальном течении идеального газа в упруго-пластическом пласте имеют вид:

$$v_2 = \frac{G}{2\pi h \rho_{at}} \cdot \frac{1}{rm(r)p(r)}, \quad R_c \leq r \leq R, \quad (3.47)$$

$$v_{2e} = \frac{G}{2\pi h \rho_{at}} \cdot \frac{1}{rm_e(r)p_e(r)}, \quad R \leq r \leq R_k. \quad (3.48)$$

Как известно, в газовом пласте поровое давление медленно изменяется вблизи контура питания и резко падает вокруг скважины. Так как скорость изменения порового давления определяет градиент давления, который, в свою

очередь, определяет скорость фильтрации, то указанное поведение давления в газовом пласте приводит к нарушению закона Дарси в прискважинной зоне. Рассмотрим решение соответствующей задачи при двучленном законе фильтрации [20]:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\mu_0}{k} m \rho_2 v_2 + \frac{\beta}{\sqrt{k}} (m \rho_2 v_2)^2, \quad (3.49)$$

где β – константа пористой среды, определяемая в результате обработки экспериментальных данных, P – функция Лейбензона.

$$P = \int p_2 dp = \frac{\rho_{at}}{2 p_{at}} p^2 + C. \quad (3.50)$$

В пластической зоне

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} = & -\frac{G \mu_0}{2 \pi h} \cdot \frac{1}{rk(r)} + \beta \left(\frac{G}{2 \pi h} \right)^2 \times \\ & \times \frac{1}{r^2 \sqrt{k(r)}} + p_R^2, \quad R_c \leq r \leq R. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Решение (3.51) имеет вид

$$P = \frac{G \mu_0}{2 \pi h} \cdot \int_{R_c}^R \frac{dr}{rk(r)} - \beta \left(\frac{G}{2 \pi h} \right)^2 \int_{R_c}^R \frac{dr}{r^2 \sqrt{k(r)}} + p_R^2. \quad (3.52)$$

Переходя от функции Лейбензона к давлению по формуле (3.52), найдем распределение давления

$$p = \sqrt{\frac{Q\mu_0 p_{at}}{2\pi h} \int_{R_c}^r \frac{1}{rk(r)} - \frac{\beta \rho_{at} p_{at}}{2} \left(\frac{Q}{\pi h}\right)^2 \int_{R_c}^R \frac{1}{r^2 \sqrt{k(r)}} + p_R^2}, \quad (3.53)$$

$$R_c \leq r \leq R.$$

Не представляет трудности определение порового давления в упругой зоне пласта

$$p_e = \sqrt{p_k^2 + \frac{Q\mu_0 p_{at}}{\pi h k_e} \ln \frac{R_k}{r} - \frac{\beta_e \rho_{at} p_{at}}{2\sqrt{k_e}} \left(\frac{Q}{\pi h}\right)^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k}\right)}, \quad (3.54)$$

$$R_c \leq r \leq R.$$

Из равенства давлений (3.53) и (3.54) на границе R , находим

$$p_R^2 = p_k^2 + \frac{Q\mu_0 p_{at}}{\pi h k_e} \ln \frac{R_k}{R} - \frac{\beta_e \rho_{at} p_{at}}{2\sqrt{k_e}} \left(\frac{Q}{\pi h}\right)^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_k}\right). \quad (3.55)$$

С помощью выражений (3.26) и (3.34) можно вычислить интеграл (3.53). Из этой формулы следует связь между депрессией на пласт и расходом

$$p_k^2 - p_a^2 = -\frac{Q\mu_0 p_{at}}{\pi h k_e} \left[\int_{R_c}^R \frac{1}{rk(r)} + \frac{1}{k_e} \ln \frac{R_k}{r} + \frac{\rho_{at} p_{at}}{2} \left(\frac{Q}{\pi h}\right)^2 \left(\beta \int_{R_c}^R \frac{dr}{r^2 \sqrt{k(r)}} + \frac{\beta_e}{k_e} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k}\right) \right) \right], \quad R_c \leq r \leq R_k. \quad (3.56)$$

Построенная индикаторная линия в координатах Q и $(p_k^2 - p_a^2)$ является параболой, но коэффициенты фильтра-

ционных сопротивлений зависят от фильтрационных параметров пластической и упругой зоны

$$p_k^2 - p_a^2 = A Q_2 + B Q_2^2 \quad (3.57)$$

где A, B – коэффициенты фильтрационных сопротивлений, постоянные для данной скважины. Тогда

$$A = -\frac{\mu_0 P_{at}}{\pi h} \left(\int_{R_c}^R \frac{1}{rk(r)} + \frac{1}{k_e} \ln \frac{R_k}{r} \right),$$

$$B = \frac{\rho_{at} P_{at}}{2} \left[\beta \int_{R_c}^R \frac{dr}{r^2 \sqrt{k(r)}} + \frac{\beta_e}{k_e} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right) \right];$$

$$Q = \frac{G}{\rho_{at}} - \text{объемный дебит скважины.}$$

Уравнение притока (3.57) с экспериментально определяемыми коэффициентами можно использовать в расчетах при проектировании разработки месторождений. По значениям A и B , найденным в результате исследования скважины, можно определить коллекторские свойства пласта. Графики в координатах Q и $\frac{p_k^2 - p_a^2}{Q}$, соответственно,

представляют собой прямые линии, для которых A – отрезок, отсекаемый на оси ординат, B – тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс.

Таким образом, введена аналитическая связь между поровым давлением, дебитом скважины и скоростями дилатансии в упругопластическом газовом пласте.

Глава IV.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛЗУЧЕМ ПЛАСТЕ

Опыт разработки нефтяных и газовых месторождений при упругом режиме подтверждает представление об упругой деформации горных пород при небольших изменениях давления в пласте. Однако, при более широких диапазонах изменения пластового давления деформация горных пород носит существенно нелинейный характер, что подтверждается, например, видом экспериментальных зависимостей пористости горных пород и их проницаемости от среднего нормального напряжения или от внутрислоевого давления. Впервые учет необратимой деформации горных пород при разработке нефтяных месторождений был осуществлен А.П.Крыловым и Г.И.Баренблаттом, создавшими теорию упругопластического режима нефтяных пластов.

Согласно этой теории физическая нелинейная зависимость пористости и проницаемости пород от среднего нормального напряжения приближенно принимается линейной или кусочно-линейной, но различной при нагружении пород (увеличением среднего нормального напряжения) и при разгрузке (уменьшением среднего нормального напряжения).

Представление о кусочно-линейной деформации горных пород при нагружении и разгрузке горной породы в случае упругопластического режима не дает возможности вполне точно описать механизм фильтрации в породах, деформирующихся по сложным реологическим законам.

Горные породы обладают способностью деформироваться во времени без увеличения напряжений, вызванных объемными или поверхностными силами, т.е. обладают

свойством ползучести.

Ползучесть различных материалов и пород характеризуется определенной зависимостью деформации в данный момент времени от всей предыдущей истории деформирования материалов и пород.

Учет свойства ползучести материала имеет важное значение, привлекает внимание многих исследователей, появилась обширная, все возрастающая литература, посвященная этой проблеме.

С ростом глубины вводимых в разработку месторождений фактов «наследственно-ползучего» поведения пластов становится значительно больше. Это и вызывает необходимость развития, теории фильтрации в пластах, которым свойственна ползучесть.

В работе [49] рассмотрена задача, связанная с установлением влияния ползучего характера деформации горных пород на фильтрацию жидкости и газа, и показана необходимость учета ползучести горных пород.

Задача о неустановившемся притоке к несовершенной по степени вскрытия скважине в неоднородном упругом пласте, состоящем из двух пропластков, рассматривалась в [3].

4.1. Приток жидкости к несовершенной скважине в однородном пласте с ползучей средой

Предположим, что конечный однородный цилиндрический пласт с ползучей средой мощностью « H » и радиусом « R », ограниченный двумя непроницаемыми поверхностями вскрыт несовершенной скважиной с дебитом q и фильтром « h » (рис. 4.1).

Согласно теории фильтрации, математически задача сводится к определению функций давления $p(r, z, t)$ в области $\{0 \leq r \leq R; 0 \leq z \leq H; 0 \leq t\}$, удовлетворяющей интегродифференциальное уравнение типа свертки [34].

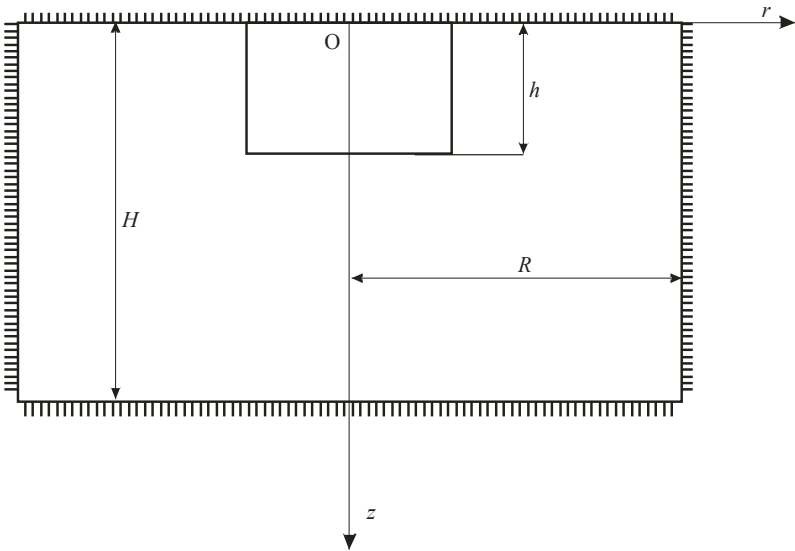


Рис. 4.1. Элементы однородного пласта с ползучей средой

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\mu q \sigma(r)}{2\pi khr} [\sigma(z) - \sigma(z-h)] \delta(r) =$$

(4.1)

$$= \frac{1}{\chi} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{m_1}{\chi \beta_{\text{жс}}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u \exp(-\gamma(t-\tau)) d\tau,$$

при следующих условиях:

$$u|_{t=0} = 0 \quad (0 < r \leq R, \quad 0 \leq z \leq H)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0;H} = 0 \quad (0 < r \leq R, \quad 0 \leq t < +\infty)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (0 < z \leq H, 0 \leq t < +\infty) \quad (4.2)$$

где

$$\chi = km_0^{-1} \mu^{-1} \beta_{жс}^{-1},$$

$$u(r, z, t) = P_0 - P(r, z, t),$$

где $P(r, z, t)$ – текущее давление в пласте; $\delta(r)$ – дельтафункция Дирака, $\sigma(z)$ – единичная функция Хевисайда; κ – проницаемость пласта; m_1 – параметр ползучести; μ – динамическая вязкость жидкости; m_0 – пористость пласта; q – дебит скважины, $\beta_{жс}$ – коэффициент упругой сжимаемости жидкости, h – глубина вскрытия скважины; j^{-1} – время релаксации.

Применяя к (4.1)-(4.2) конечное интегральное преобразование Ханкеля по переменным « r » с учетом свойства дельта-функции Дирака, получим:

$$-\lambda_m^2 u_m + \frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2} + \frac{\mu q}{2\pi k} [\sigma(z) - \sigma(z-h)] = \quad (4.3)$$

$$= \frac{1}{\chi} \frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{m_1}{\chi \beta_{жс}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u_m \exp(-\gamma(t-\tau)) d\tau,$$

$$u_m|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq z \leq H)$$

$$\left. \frac{\partial u_m}{\partial z} \right|_{z=0;H} = 0 \quad (0 \leq t < +\infty) \quad (4.4)$$

Здесь

$$u_m = \int_0^R ur J_0(\lambda_m r) dr ,$$

где $J_0(r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, λ_m – корень характеристического уравнения

$$J'(\lambda R) = 0 .$$

Применяя к (4.3)-(4.4) косинус-преобразования Фурье по переменной z с учетом свойства функции Хевисайда имеем

$$a \frac{du_{mn}}{dt} + b \frac{d}{dt} \int_0^t u_{mn} \exp(-\gamma(t-\tau)) d\tau + \lambda_{mn}^2 u_{mn} = \varphi_n \quad (4.5)$$

$$u_{mn}(t)|_{t=0} = 0 . \quad (4.6)$$

Здесь

$$a = \frac{1}{\chi} ;$$

$$b = \frac{m_1}{\chi \beta_{эс}} ;$$

$$\varphi_n = \frac{\mu q}{2\pi k} \cdot \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n h ;$$

$$\lambda_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \lambda_n^2;$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{H} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$u_{mn} = \int_0^H u_m \cos \lambda_n z dz.$$

Применив преобразование Лапласа и учитывая начальные условия (4.6), из (4.5) получим:

$$\bar{u}_{mn} = \frac{S + \gamma}{S(aS^2 + a_{mn}S + b_{mn})} \varphi_n, \quad (4.7)$$

где

$$a_{mn} = a\gamma + b + \lambda_{mn}^2,$$

$$b_{mn} = \gamma\lambda_{mn}^2,$$

$$\bar{u}_{mn} = \int_0^\infty u_{mn} e^{-St} dt.$$

S – параметр преобразования Лапласа, $Res > 0$.

Применяя обратное преобразование Лапласа и теорему разложения Хевисайда из (4.7), находим:

$$u_{mn} = \frac{\gamma}{b_{mn}} + (a_{mn}^2 - 4ab_{mn}) \left[\frac{S_{2mn} + \gamma}{S_{2mn}} \exp(S_{2mn}t) - \frac{S_{1mn} + \gamma}{S_{1mn}} \exp(S_{1mn}t) \right] \varphi_n, \quad (4.8)$$

здесь

$$S_{jmn} = \frac{-a_{mn} + (-1)^j \sqrt{a_{mn}^2 - 4ab_{mn}}}{2a} \quad (j = 1, 2).$$

При помощи обратного преобразования Фурье и Ханкеля решение поставленной задачи находится в виде:

$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{h}{2\pi CR^2} \left[\gamma t + \frac{C - a\gamma}{C} \left(1 - \exp\left(-\frac{C}{a}t\right) \right) \right] + \\ & + \frac{2}{\pi h R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sin(\lambda_n h) \cdot \left\{ \frac{1}{\lambda_{mn}^2} + (a_{mn}^2 - 4ab_{mn})^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ & \times \left[\frac{(S_{2mn} + \gamma) \exp(S_{2mn}t)}{S_{2mn}} - \frac{(S_{1mn} + \gamma) \exp(S_{1mn}t)}{S_{1mn}} \right] \Big\} \times \\ & \times \frac{J_0(\lambda_m r)}{J_0^2(\lambda_m R)} \cos(\lambda_n z), \quad (4.9) \end{aligned}$$

где $C = a\gamma + b$;

$$\Delta u = \frac{(p_0 - p)kH}{\mu q}.$$

Осредняя (4.9) по вскрываемой скважиной части пласта, определяем среднее значение безразмерного забойного давления:

$$\begin{aligned} \Delta u_c = & \frac{1}{2\pi CR^2} \left[\gamma t + \frac{C - a\gamma}{C} \left(1 - \exp\left(-\frac{C}{a}t\right) \right) \right] + \\ & + \frac{2}{\pi h R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sin^2(\lambda_n h) \times \left\{ \frac{1}{\lambda_{mn}^2} + (a_{mn}^2 - 4ab_{mn})^{-\frac{1}{2}} \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{(S_{2mn} + \gamma) \exp(S_{2mn}t)}{S_{2mn}} - \frac{(S_{1mn} + \gamma) \exp(S_{1mn}t)}{S_{1mn}} \right] \right\} \\ & \times \frac{J_0(\lambda_m r_c)}{J_0^2(\lambda_m R)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь

$$\Delta u_c = \frac{(p_0 - p_c)kH}{\mu q}.$$

В случае упругого режима фильтрации, т.е. когда $m_1=0$, $\gamma = \infty$, выражение (4.10) принимает вид:

$$\Delta u_c = \frac{1}{2\pi R^2} \gamma t + \frac{2}{\pi R^2 h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n^2} \sin^2(\lambda_n h) \times \right.$$

$$\times \frac{1}{\lambda_{mn}} (1 - \exp(-\lambda_{mn} t)) \frac{J_0(\lambda_n r_c)}{J_0^2(\lambda_m R)} \Big] \quad (4.11)$$

В случае фильтрации жидкости к несовершенной скважине в однородно-анизотропном пласте с ползучей средой смешанная задача (4.1)-(4.2) принимает вид:

$$k_r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k_r \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{q\mu\delta(r)}{2\pi hr} [\sigma(z) - \sigma(z-h)] = \quad (4.12)$$

$$= \frac{1}{\chi_1} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{m_1}{\chi_1 \beta_*} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u \exp(-\gamma(t-\tau)) d\tau$$

$$u|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq H),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0:H} = 0 \quad (0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq t < \infty), \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \quad (0 \leq z \leq H, \quad 0 \leq t < \infty).$$

Согласно предыдущему случаю безразмерное значение забойного давления будет определяться по формуле

$$\Delta u_c = \frac{1}{2\pi\alpha \overline{k_r} R^2} \left[\gamma + \frac{c_1}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{b_1} t\right) \right) \right] + \\ + \frac{2}{\pi h \overline{k_r} R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n h)}{\lambda_n} \left\{ \frac{1}{\lambda_{mn}^2} + \left(\overline{a_{mn}}^2 - 4b_1 \cdot \overline{b_{mn}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{\bar{S}_{2mn} + \gamma}{\bar{S}_{2mn}} \exp(\bar{S}_{2mn} t) - \frac{\bar{S}_{1mn} + \gamma}{\bar{S}_{1mn}} \exp(\bar{S}_{1mn} t) \right] \times \quad (4.11)$$

$$\times \frac{J_0(\lambda_m r_c)}{J_0^2(\lambda_m R)},$$

где

$$\Delta u_c = \frac{(p_0 - p_c)k_0 H}{\mu q}; \quad \alpha = b_1 \gamma + c_1.$$

$$b_1 = \frac{1}{\chi_1 k_r}; \quad \chi_1 = (m_0 \mu \beta_{\text{жс}})^{-1};$$

$$\bar{a}_{mn} = a + \bar{\lambda}_{mn}^2;$$

$$\bar{\lambda}_{mn}^2 = \lambda_m^2 + k^2 \lambda_n^2;$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{H} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\bar{b}_{mn} = \gamma \cdot \bar{\lambda}_{mn}^2, \quad k^2 = \frac{k_z}{k_r};$$

$$\bar{S}_{jmn} = \frac{-\bar{a}_{mn} + (-1)^j \sqrt{\bar{a}_{mn}^2 - 4b_1 \bar{b}_{mn}}}{2}; \quad (j = 1; 2).$$

4.2. Результаты численных расчетов

Для количественной оценки влияния ползучести пористой среды на процесс фильтрации по формуле (4.10) проведены многовариантные расчеты при исходных данных:

$$\gamma = (4,3 \div 8,6) \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{сек}};$$

$$m_1 = (3,4 \div 10,2) \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{МПа} \cdot \text{сек}};$$

$$m_0 = 0,2; \quad \mu = 10^{-9} \text{ МПа} \cdot \text{сек};$$

$$k = 0,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2; \quad H = 100 \text{ м};$$

$$h = 0,1 \div 100 \text{ м}; \quad \beta_{\text{жс}} = 10^{-3} \frac{1}{\text{МПа}};$$

$$r_c = 0,1 \text{ м}; \quad R = 1000 \text{ м}.$$

Некоторые результаты этих расчетов представлены на рисунках 4.2-4.6.

На рис. 4.2. показана динамика понижения безразмерного забойного давления при различных по степени вскрытиях пласта скважинной от времени.

Как видно на рис. 4.2., при одном и том же значении времени понижение забойного давления сильно уменьшается с увеличением степени вскрытия пласта скважиной «*h*».

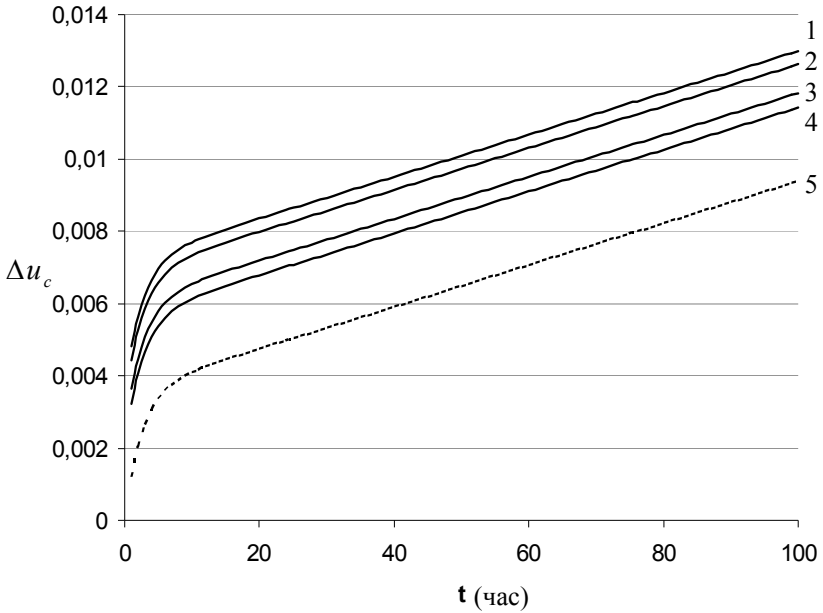


Рис. 4.2. Динамика понижения безразмерного забойного давления во времени при различных по степени вскрытиях пласта скважиной

$$\gamma = 4,3 \cdot 10^{-6} \quad 1/\text{сек}$$

$$m_1 = 3,4 \cdot 10^{-8} \quad 1/\text{Мпа} \cdot \text{сек}$$

$$h_1 = 0,1 \text{ м}; \quad h_2 = 10 \text{ м}; \quad h_3 = 20 \text{ м};$$

$$h_4 = 50 \text{ м}; \quad h_5 = 100 \text{ м};$$

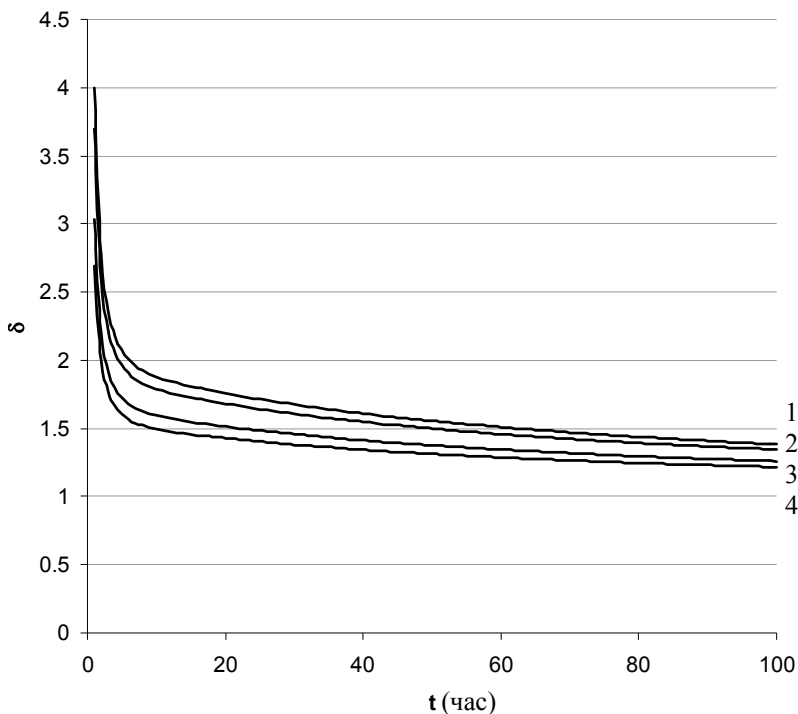


Рис. 4.3. Зависимость коэффициента несовершенства скважины δ от h во времени

$$\gamma = 4,3 \cdot 10^{-6} \quad 1/\text{сек}$$

$$m_1 = 3,4 \cdot 10^{-8} \quad 1/\text{Мпа} \cdot \text{сек}$$

$$h_1 = 0,1 \text{ м}; \quad h_2 = 10 \text{ м}; \quad h_3 = 20 \text{ м}; \quad h_4 = 50 \text{ м}.$$

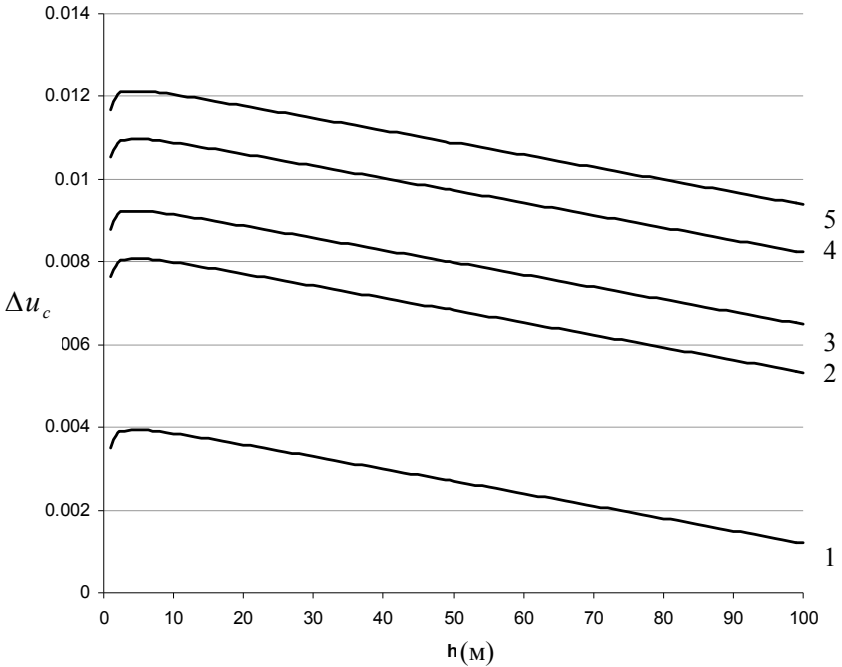


Рис. 4.4. Динамика понижения безразмерного забойного давления при фиксированных значениях времени от степени вскрытия пласта скважиной.

$$t_1 = 1 \text{ час}; t_2 = 10 \text{ час}; t_3 = 20 \text{ час}; t_4 = 50 \text{ час}; \\ t_5 = 80 \text{ час}; t_6 = 100 \text{ час}.$$

$$\gamma = 4,3 \cdot 10^{-6} \quad 1/\text{сек}$$

$$m_1 = 3,4 \cdot 10^{-8} \quad 1/\text{Мпа} \cdot \text{сек}$$

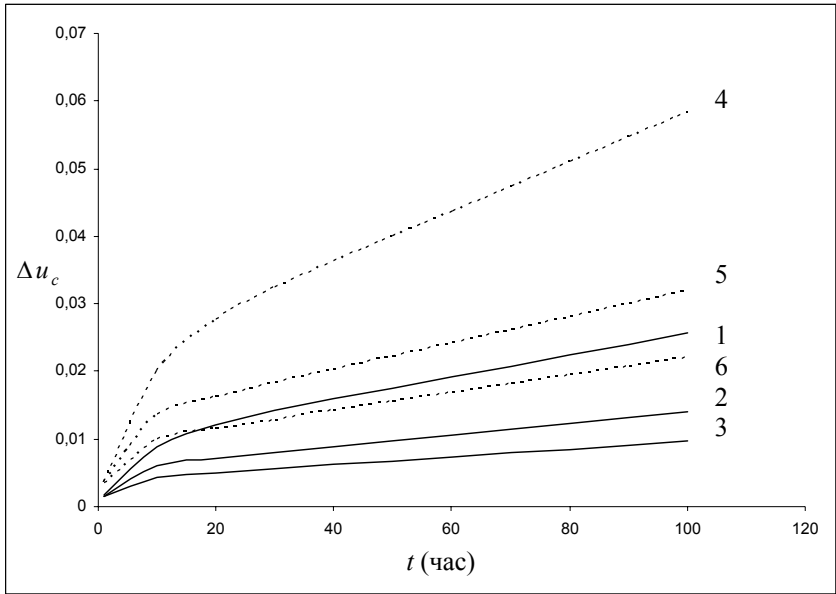


Рис. 4.5. Изменение безразмерного забойного давления во времени при различных значениях параметра ползучести

Здесь $\gamma = 4,3 \cdot 10^{-6}$ 1/сек .

1. $m_1 = 3,4 \cdot 10^{-8}$ 1/МПа·сек; 2. $m_1 = 4,3 \cdot 10^{-6}$ 1/ МПа·сек;

3. $m_1 = 8,6 \cdot 10^{-6}$ 1/ МПа·сек.

На 4, 5 и 6-ой кривых показано изменение безразмерного забойного давления в упругом режиме.

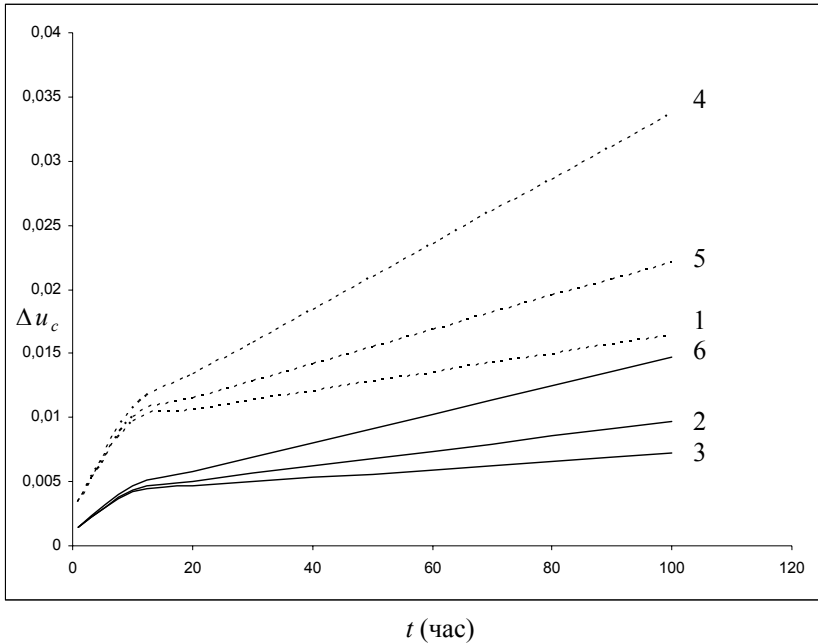


Рис. 4.6. Изменение безразмерного забойного давления во времени при различных значениях времени релаксации

1. $\gamma = 2.3 \cdot 10^{-6}$ 1/сек; 2. $\gamma = 4.3 \cdot 10^{-6}$ 1/сек; 3. $\gamma = 8.6 \cdot 10^{-6}$ 1/сек.

Здесь $m_1 = 4,3 \cdot 10^{-8}$ 1/МПа · сек.

На 4., 5. и 6-ой кривых показано изменение безразмерного забойного давления в упругом режиме.

На рис. 4.3. построены кривые, характеризующие зависимость коэффициента совершенства:

$$\delta = \frac{\Delta u_{\text{ср. нес.}}}{\Delta u_{\text{ср. сов.}}}$$

(отношение безразмерного забойного давления несовершенной и совершенной скважин) от времени.

Как видно из графиков, довольно резкое возрастание коэффициента « δ » наблюдается при малых значениях h и времени.

Увеличение значения « h » и времени приводит к уменьшению величины δ .

Анализ кривых, приведенных на рисунках 4.5 и 4.6. показывает, что с увеличением параметра ползучести « m_1 » уменьшается величина $\Delta \overline{p}_c$ в ползучей среде.

По характеру изменения во времени кривые Δu_c как для пласта с ползучей средой, так и для недеформируемого пласта идентичны. Как видно, при $t > 5$ часов значения Δu_c для любых « m_1 » и « γ » с достаточной точностью совпадают с u и их можно считать одинаковыми как для ползучей среды, так и недеформируемой.

Обобщая сказанное, можно отметить, что при $t < 5$ часов влиянием ползучей деформации пористой среды на технологические показатели (например, на Δu_c) с высокой точностью можно пренебречь. Однако ползучая деформация пористой среды на величину Δu_c оказывает существенное влияние во времени при $t > 5$ часов.

Причем, чем меньше значения γ (рис. 4.6), т.е. чем больше время релаксации среды по пористости, тем меньше значение Δu_c для обеспечения заданного уровня добычи жидкости из месторождения.

4.3. Приток жидкости к несовершенной скважине в неоднородных ползучих средах

В данном параграфе решена задача о притоке жидкости к несовершенной по степени вскрытия скважине в неоднородных ползучих средах.

Предполагается, что пласт состоит из двух пропластков различной проницаемости и в каждом пласте работает одна несовершенная скважина (рис. 4.7).

Данная задача с помощью обобщенных функций имеет следующую математическую постановку: найти в области

$$D_1 = \{0 < r \leq R, 0 \leq z = h_1\}, \quad D_2 = \{0 < r \leq R, h_1 \leq z \leq H\}$$

решение системы интегро-дифференциальных уравнений типа свертки:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \\ & + \frac{\mu q_j}{2\pi k_j b_j r} [\sigma(z - h_{j-1}) - \sigma(z - h_{j-1} - b_j)] \delta(r) = \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{m_1}{\chi_j \beta_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u_j \exp(-\gamma(t - \tau)) d\tau, \quad (j = 1, 2)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u_j \Big|_{t=0} = 0$$

$$(0 < r \leq R, 0 \leq z \leq h_1 / z \in D_1, h_1 \leq z \leq H / z \in D_2)$$

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial z} \right|_{z=0,H} = 0 \quad (0 < r \leq R, 0 \leq t < +\infty), \quad (4.16)$$

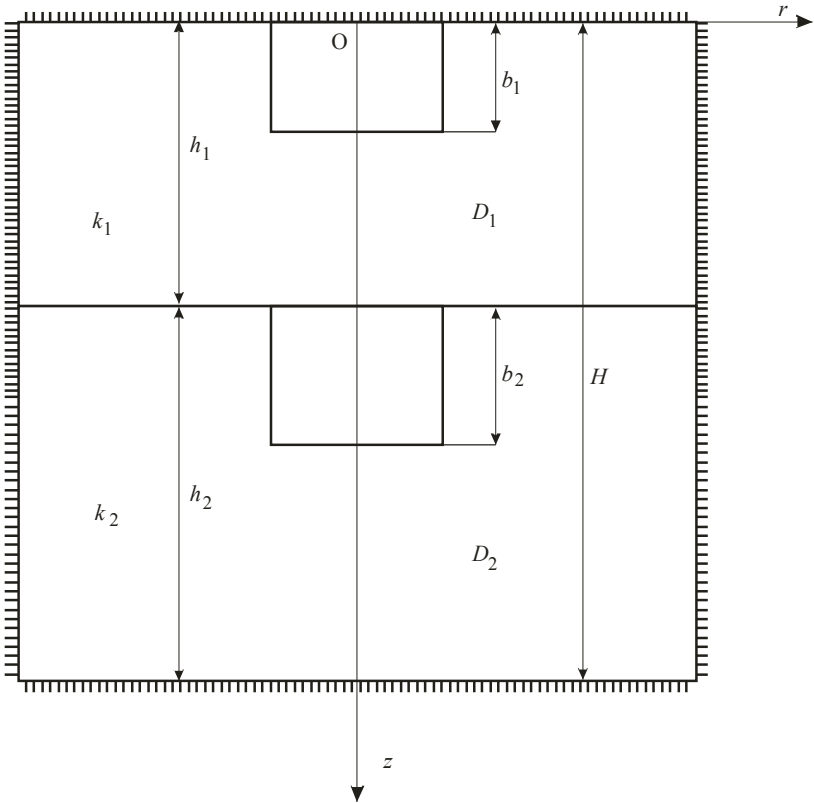


Рис. 4.7. Элементы неоднородного пласта с ползучей средой

$$\frac{\partial u_j}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$$

$$(0 \leq z \leq h_1 / z \in D_1, h_1 \leq z \leq H / z \in D_2, 0 \leq t < +\infty)$$

На общих границах зон неоднородности имеют место условия:

$$u_1 \Big|_{z=h_1} = u_2 \Big|_{z=h_1},$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=h_1} \quad (0 < r \leq R, 0 \leq t < +\infty), \quad (4.17)$$

где

$$h_0 = 0, H = h_1 + h_2,$$

$$\chi_j = k_j m_0^{-1} \mu^{-1} \beta_m^{-1} \quad (j = 1, 2) \quad u_j(r, z, t) = P_0 - P_j(r, z, t)$$

$P_j(r, z, t)$ – текущее давление в j – ом пласте; $b(z)$ – единичная функция Хевисайда; κ_j – проницаемость j – й зоны; h_1, h_2 – мощность первой и второй зоны; q_j – дебит скважины, работающей в j – й зоне, b_j – глубина вскрытия скважины в j – м пласте.

Применяя для решения поставленной задачи (4.15)-(4.17) конечное преобразование Ханкеля и учитывая свойства дельтафункции Дирака, получим:

$$\begin{aligned} & -\lambda_m^2 u_{jm} + \frac{\partial^2 u_{jm}}{\partial z^2} + \frac{\mu q_j}{2\pi k_j b} \times \\ & \times [\sigma(z - h_{j-1}) - \sigma(z - h_{j-1} - b_j)] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial u_{jm}}{\partial t} + \frac{m_1}{\chi_j \beta_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u_j \exp(-\gamma(t-\tau)) d\tau, \quad (j=1,2) \quad (4.18)$$

$$u_{jm}|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq z \leq h_1 / z \in D_1, h_1 \leq z \leq H / z \in D_2)$$

$$\left. \frac{\partial u_{jm}}{\partial z} \right|_{z=0,H} = 0 \quad (0 \leq t < +\infty),$$

$$u_{1m}|_{z=h_1} = u_{2m}|_{z=h_1},$$

$$k_1 \left. \frac{\partial u_{1m}}{\partial z} \right|_{z=h_1} = k_2 \left. \frac{\partial u_{2m}}{\partial z} \right|_{z=h_1} \quad (0 \leq t < +\infty), \quad (4.19)$$

здесь

$$u_j(\lambda, z, t) = \int_0^R u_j r J_0(\lambda r) dr,$$

где $J_0(r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, λ_m – положительный корень характеристического уравнения

$$J'_0(\lambda_m R) = 0.$$

Напишем совокупность собственных функций $\psi_{jmn}(z)$ ($j=1,2$), удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi_{jmn}(z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\lambda_{mn}}{\chi_j} - \lambda_m^2 \right) \psi_{jmn}(z) = 0 \quad (4.20)$$

и условиям сопряжения:

$$\begin{aligned} \psi_{1mn}(z)|_{z=h_1} &= \psi_{2mn}(z)|_{z=h_1}, \\ k_1 \frac{d\psi_{1mn}(z)}{dz}|_{z=h_1} &= k_2 \frac{d\psi_{2mn}(z)}{dz}|_{z=h_1} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь λ_{mn} – собственные значения соответствующей задачи (4.20)-(4.21) Штурма – Лиувилля.

Функции $\psi_{jmn}(z)$ на концах интервала должны удовлетворять следующим однородным граничным условиям:

$$\psi_{1mn}(0) = \psi_{2mn}(H) = 0 \quad (4.22)$$

Собственные функции $\psi_{1mn}(z)$, $\psi_{2mn}(z)$, соответствующие задачам (4.20)-(4.21), имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_{1mn}(z) &= C_{mn} \cos(\mu_{1mn} z), \\ \psi_{2mn}(z) &= C_{mn} \frac{\cos(\mu_{1mn} h_1)}{\cos(\mu_{2mn} h_2)} \cos(\mu_{2mn} (H - z)), \\ \mu_{jmn} &= \frac{\lambda_{mn}}{\chi_j} - \lambda_m \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

Коэффициенты C_{mn} определяются из условия нормированности функций $\psi_{1mn}(z)$, $\psi_{2mn}(z)$ в областях D_1 и D_2 с весом,

$$\gamma(z) = \begin{cases} \frac{k_1}{\chi_1}, & 0 \leq z \leq h_1 \\ \frac{k_2}{\chi_2}, & h_1 \leq z \leq H \end{cases}$$

$$\frac{k_1}{\chi_1} \int_0^{h_1} \psi_{1mn}^2(z) dz + \frac{k_2}{\chi_2} \int_{h_1}^H \psi_{2mn}^2(z) dz = 1$$

$$C_{mn} = \sqrt{2} \left[\frac{k_1}{\chi_1} \left(h_1 + \frac{\sin 2\mu_{1mn}^2 h_1}{2\mu_{1mn}^2} \right) + \frac{k_2}{\chi_2} b_{mn} \left(h_2 + \frac{\sin 2\mu_{2mn}^2 h_2}{2\mu_{2mn}^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

где

$$b_{mn} = \frac{\cos^2(\mu_{1mn} h_1)}{\cos^2(\mu_{2mn} h_2)}.$$

Применяя стандартные процедуры, собственные числа определяем из следующих трансцендентных систем уравнений:

$$\begin{cases} k_1 \mu_{1mn} \operatorname{tg}(\mu_{1mn} h_1) + k_2 \mu_{2mn} \operatorname{tg}(\mu_{2mn} h_2) = 0 \\ \chi_1 (\lambda_m^2 + \mu_{1mn}^2) = \chi_2 (\lambda_m^2 + \mu_{2mn}^2) \end{cases}.$$

Используя метод собственных функций Гринберга Г.А., для решения системы (4.18)-(4.19) и учитывая свойства единичной функции Хевисайда, получим задачу типа Коши: т.е. умножая уравнение (4.18) соответственно на $\chi_1 \psi_{1mn}$, $\chi_2 \psi_{2mn}$ и интегрируя первый из полученных результатов по z , от нуля до $z=h_1$, а второй от $z=h_1$ до $z=H$, складывая эти уравнения и учитывая условия (4.19) и (4.21), получим:

$$\frac{d\Phi_{mn}}{dt} + a \frac{d}{dt} \int_0^t \Phi_{mn}(\tau) \exp(-\gamma(t-\tau)) d\tau +$$

$$+ \lambda_{mn} \Phi_{mn}(t) = B_{mn} \quad (4.23)$$

$$\Phi_{mn}(t)|_{t=0} = 0, \quad (4.24)$$

где

$$\Phi_{mn}(t) = \int_0^{h_1} \psi_{1mn}(z) \cdot u_{1mn}(z, t) dz + \int_{h_1}^H \psi_{2mn}(z) \cdot u_{2mn}(z, t) dz$$

$$B_{mn} = m_0^{-1} \mu^{-1} \beta_{жс}^{-1} C_{mn} \left[\frac{q_1}{\mu_{1mn}} \sin(\mu_{1mn} b_1) + \frac{2q_2}{\mu_{2mn}} \cdot \frac{\cos(\mu_{1mn} h_1)}{\cos(\mu_{2mn} h_2)} \times \right.$$

$$\left. \times \cos \mu_{2mn} (h_2 - \frac{b_2}{2}) \sin \frac{\mu_{2mn} b_2}{2} \right],$$

$$a = \frac{m_1}{\beta_{жс}}.$$

Используя преобразование Лапласа, получим решение задачи (4.23)-(4.24) в классе изображений в виде:

$$\bar{\Phi}_{mn}(s) = B_m \frac{S + \gamma}{S(S^2 + a_{mn}S + b_{mn})}, \quad (4.25)$$

где

$$a_{mn} = a + \lambda_{mn} + \gamma,$$

$$b_{mn} = \lambda_{mn}\gamma,$$

$$\bar{\Phi}_{mn}(s) = \int_0^{\infty} \Phi_{mn}(t)e^{-St} dt,$$

S – параметр преобразования Лапласа, $Res > 0$. Используя обратное преобразование Лапласа, из (4.25) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(t) = B_{mn} & \left[\frac{\gamma}{S_{1mn} \cdot S_{2mn}} + \frac{S_{1mn} + \gamma}{S_{1mn}(S_{1mn} - S_{2mn})} \exp(S_{1mn}t) + \right. \\ & \left. + \frac{S_{2mn} + \gamma}{S_{2mn}(S_{2mn} - S_{1mn})} \exp(S_{2mn}t) \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь

$$S_{jmn} = \frac{-a_{mn} + (-1)^j \sqrt{a_{mn}^2 - 4b_{mn}}}{2} \quad (j = 1, 2)$$

При помощи обратного преобразования Ханкеля и Гринберга решение поставленной задачи находится в виде:

$$u_j(r, z, t) = \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ B_{on} \left[\frac{\gamma}{b_{on}} + (a_{on}^2 - 4b_{on})^{-\frac{1}{2}} \left(\left(1 + \frac{\gamma}{S_{2on}} \right) \exp(S_{2on}t) - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(1 + \frac{\gamma}{S_{1on}} \right) \exp(S_{1on} t) \Big] \psi_{jon}(z) + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ B_{mn} \left[\frac{\gamma}{b_{mn}} + (a_{mn}^2 - 4b_{mn})^{-\frac{1}{2}} \left(\left(1 + \frac{\gamma}{S_{2mn}} \right) \times \right. \right. \right. \\
 & \times \exp(S_{2mn} t) - \left. \left. \left(1 + \frac{\gamma}{S_{1mn}} \right) \exp(S_{1mn} t) \right) \right] \frac{J_0(\lambda_m r)}{J_0^2(\lambda_m R)} \psi_{jmn}(z) \right. \\
 & \left. (j = 1, 2) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Выражение (4.27) представляет собой разложение функции $U_j(r, z, t)$ в ряд по собственным функциям.

Для упругого режима, т.е. когда $m_l = 0$, $\gamma = \infty$ из решения (4.27) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 u_j(r, z, t) = & \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_{on}}{\lambda_{on}} [1 - \exp(-\lambda_{on} t)] \psi_{jon}(z) + \right. \\
 & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_{mn}}{\lambda_{mn}} [1 - \exp(-\lambda_{mn} t)] \psi_{jmn}(z) \frac{J_0(\lambda_m r)}{J_0^2(\lambda_m R)} \right\} \right. \quad (j = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

При $k_1 = k_2 = k$ из формулы (4.27) получается формула (4.9), т.е. результаты, соответствующие однородному пласти.

4.4. Решение интегро-дифференциального уравнения фильтрации с учетом ползучести в анизотропной среде

В данном параграфе решается интегро-дифференциальное уравнение фильтрации жидкости в анизотропных ползучих средах.

Пусть фильтрационная область D состоит из двух областей $D_1, D_2, D=D_1 \cup D_2$, которые снаружи и внутри ограничены цилиндрическими поверхностями. Между областями D_1 и D_2 существуют слабопроницаемые перемычки. Искомая функция давления $P_j(r, \theta, z, t)$ ($j = 1, 2$) имеет в точках (r_{ijk}, θ_{ijk}) конечное число логарифмических особенностей. С помощью обобщенных функций данная задача имеет следующую математическую постановку:

Найти в области

$$D_1 = \{R_1 \leq r \leq R_2; 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq z \leq b_1\},$$

$$D_2 = \{R_1 \leq r \leq R_2; 0 \leq \theta \leq \infty; b_1 + b_n \leq z \leq b\}$$

решение системы интегро-дифференциальных уравнений типа свертки

$$\begin{aligned} & k_{jr} \frac{\partial^2 P_j(r, \theta, z, t)}{\partial r^2} + k_{jr} \frac{1}{r} \frac{\partial \beta_j(r, \theta, z, t)}{\partial r} + \\ & + k_{jz} \frac{\partial^2 P_j(r, \theta, z, t)}{\partial z^2} + k_{j\theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P_j(r, \theta, z, t)}{\partial \theta^2} + \\ & + \frac{\mu}{2\pi r} \sum_{i=1}^{M_i} \sum_{k=1}^{N_j} \frac{q_{ijk}(t)}{h_{ijk}} \delta(r - r_{ijk}) \delta(\theta - \theta_{ijk}) [\sigma(z - b_{j-1}) - \sigma(z - b_{j-1} - h_{ijk})] \times \end{aligned}$$

$$\times [\sigma(t-t_{j-1,j}) - \sigma(t-t_{i,j})] = \frac{1}{\chi} \frac{\partial P_j(r, \theta, z, t)}{\partial t} + \quad (4.29)$$

$$+ \frac{\delta_1}{\chi \beta_{\text{жс}}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{2}} P_j(r, \theta, z, t) dt$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$P_j(r, \theta, z, t)|_{t=0} = 0$$

$$(R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq b_1 | z \in D_1 \quad b_1 + b_n \leq z \leq b | z \in D_2)$$

$$\left. \frac{\partial P_1(r, \theta, z, t)}{\partial r} \right|_{z=R_1} = f_1(\theta, z, t) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq b_1, 0 \leq t < +\infty)$$

$$\left. \frac{\partial P_2(r, \theta, z, t)}{\partial r} \right|_{z=R_2} = f_2(\theta, z, t) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, b_1 + b_n \leq z \leq b_1, 0 \leq t < +\infty)$$

$$\left. \frac{\partial P_1(r, \theta, z, t)}{\partial r} \right|_{z=R_2} = \varphi_1(\theta, z, t) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq b_1, 0 \leq t < +\infty)$$

$$\left. \frac{\partial P_2(r, \theta, z, t)}{\partial r} \right|_{z=R_2} = \varphi_2(\theta, z, t) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, b_1 + b_n \leq z \leq b_1, 0 \leq t < +\infty)$$

$$\left. \frac{\partial P_1(r, \theta, z, t)}{\partial r} \right|_{z=0} = \psi_1(r, \theta, t) \quad (R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t < +\infty)$$

$$\left. \frac{\partial P_2(r, \theta, z, t)}{\partial r} \right|_{z=b} = \psi_2(r, \theta, t) \quad (R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t < +\infty)$$

На общих границах зон имеем условия:

$$\frac{\partial P_1(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=b_1} = \alpha_1 \left[P_2(r, \theta, z, t) \Big|_{z=b_1+b_2} - P_1(r, \theta, z, t) \Big|_{z=b_1} \right] \quad (4.30)$$

$$(R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t < +\infty)$$

$$\frac{\partial P_2(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=b_1+b_n} = \alpha_2 \left[P_2(r, \theta, z, t) \Big|_{z=b_1+b_n} - P_1(r, \theta, z, t) \Big|_{z=b_1} \right] \quad (4.31)$$

$$(R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t < +\infty).$$

На функции $P_j(r, \theta, z, t)$ по аргументу θ задается условие периодичности

$$P_j(r, \theta + 2\pi, z, t) = P_j(r, \theta, z, t) \quad (j = 1, 2) \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} &(R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq z \leq b_1 \\ &|z \in D, b_1 + b_n \leq z \leq b, |z \in D, 0 \leq t < +\infty). \end{aligned}$$

Здесь

$$\alpha_j = \frac{K_n}{K_{jz} b_n} \quad (j = 1, 2);$$

$$b = b_1 + b_2 + b_n;$$

$$\chi = \mu_0^{-1} \beta_m^{-1};$$

k_n, b_n – проницаемость и мощность перемычки.

δ_1 – параметр ползучести; в $[t_{i-1,j}, t_{i,j}]$ промежутке времени, в котором действуют источники (стоки);

$P_j(r, \theta, z, t) = P_0 - \bar{P}_j(r, \theta, z, t)$, P_0 – начальное давление;

$P_j(r, \theta, z, t)$ – текущее давление в j -ом пласте ($j = 1, 2$);

$\frac{\delta_1}{\sqrt{t}}$ – ядро Абеля;

$\delta(r, \theta)$ – дельта – функция Дирака;

$\sigma(z, t)$ – единичная функция Хевисайда;

$q_{ijk}(t)$ – дебит k -ой скважины в j -ой зоне в соответствующий промежуток времени;

b_1, b_2 – соответственно, мощность верхнего и нижнего пластов;

h_{jk} – глубина вскрытия k -ой скважины в j -м пласте;

R_1, R_2 – расстояние от начала координат до наружной и внутренней поверхностей, соответственно;

μ_0 – динамическая вязкость жидкости;

β_m – коэффициент сжимаемости жидкости; m – пористость пласта;

M_j – сумма промежутков времени в j -ой зоне, в которых действуют источники (стоки);

N_j – число скважин в j -ой зоне;

На функции $f_i(\theta, z, t)$ и $\varphi_j(\theta, z, t)$ ($j = 1, 2$) налагаются условия, абсолютного интегрирования по переменным (θ, z) и непрерывного дифференцирования по аргументу t .

Для решения поставленной задачи (4.29) – (4.32) применяем конечное синус-преобразование Фурье по переменной θ с ядром $\sin \theta$ и конечное преобразование Ханкеля [2], учитывая свойства дельта-функции Дирака, получаем:

$$\begin{aligned}
 & K_{jz} \frac{\partial^2 P_{jmn}(z,t)}{\partial z^2} - K_{jr} \lambda_{mn}^2 P_{jmn}(z,t) + F_{jmn}(z,t) = \\
 & = \frac{1}{\chi} \frac{\partial P_{jmn}(z,t)}{\partial t} + \frac{\delta_1}{\chi \beta_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t-r)^{\frac{1}{2}} P_{jmn}(z,\tau z) \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

$$P_{jmn}(z,t)|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq z \leq b_1 / z \in D_1, b_1 + b_n \leq z \leq b / z \in D_2),$$

$$\frac{\partial P_{1mn}(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \psi_{1mn}(t),$$

$$\frac{\partial P_{2mn}(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=b} = \psi_{2mn}(t) \quad (0 \leq t < +\infty)$$

$$\frac{\partial P_{1mn}(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=b_1} = \alpha_1 \left[P_{2mn}(z,t) \Big|_{z=b_1+b_n} - P_{1mn}(z,t) \Big|_{z=b_1} \right] \quad (0 \leq t < +\infty) \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial P_{2mn}(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=b_1+b_n} = \alpha_2 \left[P_{2mn}(z,t) \Big|_{z=b_1+b_n} - P_{1mn}(z,t) \Big|_{z=b_1+b_n} \right].$$

Ядро преобразования Ханкеля $V_{mn}(\lambda_{mn}r)$ имеет вид:

$$V_m(\lambda_{mn}r) = \frac{\pi}{2} \left[J_m(\lambda_{mn}r) \cdot \frac{Y'_m(\lambda_{mn}R_1)}{J'_m(\lambda_{mn}R_1)} - Y_m(\lambda_{mn}r) \right] \quad (4.35)$$

λ_{mn} — является корнем характеристического уравнения,

$$\begin{aligned}
 & J_{m+1}(\lambda_{mn}R_1) \cdot Y_{m+1}(\lambda_{mn}R_2) - \\
 & - Y_{m+1}(\lambda_{mn}R_1) \cdot J_{m+1}(\lambda_{mn}R_2) = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

J_m, Y_m – функции Бесселя m -го порядка первого и второго рода,
где

$$\begin{aligned}
 F_{jmn}(z, t) &= \frac{\mu}{2\pi} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{k=1}^{N_j} \left\{ \frac{q_{ijk}(t)}{h_{jk}} \sin(m\theta_{ijk}) V_m(\lambda_{mn}r_{ijk}) \times \right. \\
 & \times \left[\sigma(z - b_{j-1}) - \sigma(z - b_{j-1} - h_{jk}) \right] \left[\sigma(t - t_{i-1,j}) - \sigma(t - t_{i,j}) \right] \Big\} + \\
 & + K_{jr} \left[R_2 \varphi_{jm}(z, t) V_m(\lambda_{mn}R_2) - R_1 f_{jm}(z, t) V_m(\lambda_{mn}R_1) \right], \\
 \psi_{jmn}(t) &= \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \psi_j(r, \theta, t) r V_m(\lambda_{mn}r) \sin(m\theta) d\theta dr, \\
 f_{jm}(z, t) &= \int_0^{2\pi} f_j(\theta, z, t) \sin(m\theta) d\theta, \\
 \varphi_{jmn}(z, t) &= \int_0^{2\pi} \varphi_j(\theta, z, t) \sin(m\theta) d\theta \quad (j=1,2) \quad (m=1,2,\dots)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим совокупность собственных функций $U_{jmnv}(z)$ ($j=1,2$), удовлетворяющих уравнению

$$\frac{d^2 U_{jmnv}(z)}{dz^2} + \left(\frac{\lambda_{mnv}}{\chi K_{jz}} - \frac{K_{jr}}{K_{jz}} \chi_{mn}^2 \right) U_{jmnv}(z) = 0 \quad (4.37)$$

и граничным условиям

$$U_{1mnv}(z)|_{z=0} = 0,$$

$$U_{1mnv}(z) = \alpha_1 \left[U_{2mnv}(z)|_{z=b_1+b_n} - U_{1mnv}(z)|_{z=b_1} \right], \quad (4.38)$$

$$U_{2mnv}(z)|_{z=b} = 0,$$

$$U_{2mnv}(z)|_{z=b_1+b_n} = \alpha_2 \left[U_{2mnv}(z)|_{z=b_1+b_n} - U_{1mnv}(z)|_{z=b_1} \right]$$

Предполагается, что $P_{jmn}(z, t)$ допускает разложение в ряд по фундаментальным функциям $U_{jmnv}(z)$ однородной задачи. Решение задачи (4.37) – (4.38) имеет вид:

$$U_{1mnv}(z) = A_{1mnv} \cos \mu_{1mnv} z, \quad (4.39)$$

$$U_{2mnv}(z) = A_{1mnv} \cdot B_{mnv} \cos(\mu_{2mnv}(b - z)),$$

где

$$B_{mnv} = \frac{\alpha_2 \cos(\mu_{1mnv} b_1)}{\alpha_2 \cos(\mu_{2mnv} b_2) - \mu_{2mnv} \cdot \sin(\mu_{2mnv} b_2)};$$

$$\mu_{jmnv} = \frac{1}{K_j z} \left(\frac{\lambda_{mnv}}{\chi} - K_{jr} \lambda_{mn}^2 \right).$$

Собственные числа $\mu_{jmnv} (j=1,2)$, соответствующие задаче Штурма-Лидвиля, определяются из следующих трансцендентных систем уравнений

$$\begin{cases} \mu_{1mnv} \mu_{2mnv} \operatorname{tg}(\mu_{1mnv} b_1) \operatorname{tg}(\mu_{2mnv} b_2) = \\ = \alpha_1 \mu_{2mnv} \operatorname{tg}(\mu_{2mnv} b_2) + \alpha_2 \mu_{1mnv} \operatorname{tg}(\mu_{1mnv} b_1) \\ K_{1r} \lambda_{mn}^2 + K_{1z} \mu_{1mnv}^2 = K_{2r} \lambda_{mn}^2 + K_{2z} \mu_{2mnv}^2 \end{cases} \quad (4.40)$$

A_{1mnv} – определяется из условия нормировки функции $U_{1mnv}(z)$ и $U_{2mnv}(r)$ в области D_1 и D_2 в следующем виде:

$$A_{1mnv} = \sqrt{2\chi} \left\{ K_{1z} \left[b_1 + \frac{\sin(2\mu_{1mnv} b_1)}{2\mu_{1mnv}} \right] + \right. \\ \left. + K_{2z} \cdot B_{mnv}^2 \left[b_2 + \frac{\sin(2\mu_{2mnv} b_2)}{2\mu_{2mnv}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Применяя к задаче (4.33) – (4.34) метод собственных функций Г.А.Гринберга [3], учитывая свойства дельта функции Дирака, получим задачу типа Коши:

$$\frac{d\phi_{mnv}(t)}{dt} + a \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\phi_{mnv}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \lambda_{mnv} \phi_{mnv}(t) = F_{mnv}(t) \quad (4.41)$$

$$\phi_{mnv}(0) = 0, \quad (4.42)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_{mnv}(t) = & \int_0^{b_1} P_{1mnv}(z, t) \cdot U_{1mnv}(z) dz + \\ & + \int_{b_1+b_n}^{b_1} P_{2mnv}(z, t) \cdot U_{2mnv}(z) dz, \quad a = \frac{\delta_1}{\beta_m}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$F_{mnv}(t) = A_{1mn} \chi [\chi_{2z} \psi_{2mn}(t) \cdot B_{mnv} - \chi_{1z} \psi_{1mn}(t)] + \chi [\eta_{1mnv}(t) + \eta_{2mnv}(t)]$$

$$\eta_{1mnv}(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} A_{1mnv} \cdot \frac{\chi_{1z}}{\mu_{1mnv}} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_1} \left\{ \frac{q_{i1k}(t)}{h_{1k}} \sin(m\theta_{i1k}) \cdot V_m(\lambda_{mn} r_{i1k}) \times \right.$$

$$\left. \times \sin(\mu_{1mnv} h_{1k}) [\sigma(t - t_{i-1,1}) - \sigma(t - t_{i,1})] \right\} +$$

$$+ K_{1r} \chi_{1z} \int_0^{b_1} [R_2 \varphi_{1m}(z, t) \cdot V_m(\lambda_{mn} R_2) - R_1 f_{1m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_1)] \cdot U_{1mnv}(z) dz$$

$$\eta_{2mnv}(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} A_{1mnv} B_{mnv} \times$$

$$\times \frac{\chi_{2z}}{\mu_{2mnv}} \sum_{i=1}^{M_2} \sum_{k=1}^{N_2} \left\{ \frac{q_{i2k}(t)}{h_{2k}} \sin(m\theta_{i2k}) \cdot V_{mn}(\lambda_{mn} r_{i2k}) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \sin\left(\frac{h_{2k}}{2} \mu_{2mnv}\right) \cdot \cos\left(\mu_{2mnv}\left(b_2 - \frac{h_{2k}}{2}\right)\right) \times \\ & \times \left[\sigma(t-t_{i-1,2}) - \sigma(t-t_{i,2})\right] + K_{2r} \cdot \chi_{2z} \times \\ & \times \int_{b_1+b_n}^b [R_2 \varphi_{2m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_2) - R_1 f_{2m}(z, t) V_{mn}(\lambda_{mn} R_1)] U_{2mnv}(z) dz, \end{aligned}$$

$$\chi_{jz} = \chi \cdot K_{jz} \quad (j=1,)$$

Используя преобразование Лапласа и учитывая свойства единичной функции Хевисайда, получим решение задачи (4.41) – (4.42) в классе изображений в виде:

$$\bar{\phi}_{mnv}(s) = \frac{\bar{F}_{mnv}(s)}{s + a\sqrt{\pi} \sqrt{s} + \lambda_{mnv}}. \quad (4.44)$$

Здесь

$$\bar{\phi}_{mnv}(s) = \int_0^{\infty} \phi_{mnv}(t) e^{-st} dt, \quad (4.45)$$

$$\bar{F}_{mnv}(s) = \int_0^{\infty} F_{mnv}(t) e^{-st} dt$$

$$\eta_{jmnv}(s) = \int_0^{\infty} \eta_{jmnv}(t) e^{-st} dt, \quad (j=1,2)$$

$$\psi_{jmn}(s) = \int_0^{\infty} \psi_{jmn}(t) e^{-st} dt \quad (j=1,2)$$

$$\eta_{1mnv}(s) = \frac{\mu_0}{2\pi} A_{1mnv} \cdot \frac{\chi_{1z}}{\mu_{1mnv}} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{N_1} \left[\frac{V_m(\lambda_{mn} r_{ik})}{h_{1k}} \sin(m\theta_{ik}) \cdot \int_{t_{i-1,1}}^{t_{i,1}} q_{ik}(t) e^{-st} dt \right] + K_{1r} \cdot \chi_{1z} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{b_1} [R_2 \varphi_{1m}(z, t) \cdot V_m(\lambda_{mn} R_2) - R_1 f_{1m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_1)] U_{1mnv}(z) dz \right\} e^{-st} dt$$

$$\eta_{2mnv}(s) = \frac{\mu_0}{\pi} A_{1mnv} \cdot B_{mnv} \frac{\chi_{2z}}{\mu_{2mnv}} \sum_{i=1}^{M_2} \sum_{k=1}^{N_2} \left[\frac{V_m(\lambda_{mn} r_{i2k})}{h_{2k}} \sin(m\theta_{i2k}) \times \right.$$

$$\times \sin\left(\frac{h_{2k}}{2} \mu_{2mnv}\right) \cos\left(\mu_{2mnv} \left(b_2 - \frac{h_{2k}}{2}\right)\right) \int_{t_{i-1,2}}^{t_{i,2}} q_{i2k}(t) e^{-st} dt \left. \right] + K_{2r} \cdot \chi_{2z} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \left\{ \int_{b_1+b_n}^b [R_2 \varphi_{2m}(z, t) V_{mn}(\lambda_{mn} R_2) - R_1 f_{2m}(z, t) V_{mn}(\lambda_{mn} R_1)] U_{2mnv}(z) dz \right\} e^{-st} dt$$

s - параметр преобразования Лапласа, $\text{Re}s > 0$.

Применяя обратное преобразование Лапласа, теорема о свертке к (4.44) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \phi_{mnv}(t) = & \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 - 4\lambda_{mnv}}} \times \\ & \times \int_0^t F_{mnv}(t-\tau) [\gamma_{mnv} \exp(\gamma_{mnv}^2 \tau) \operatorname{erfc}(\gamma_{mnv} \sqrt{\tau}) - \\ & - \alpha_{mnv} \exp(\alpha_{mnv}^2 \tau) \operatorname{erfc}(\alpha_{mnv} \sqrt{\tau})] d\tau \end{aligned} \quad (4.46)$$

Здесь

$$\alpha_{mnv} = \frac{a\sqrt{\pi}}{2} - \sqrt{\frac{\pi a^2}{4} \lambda_{mnv}},$$

$$\gamma_{mnv} = \frac{a\sqrt{\pi}}{2} + \sqrt{\frac{\pi a^2}{4} \lambda_{mnv}}.$$

$$\operatorname{erfc}x = 1 - \operatorname{erf}x,$$

$$\operatorname{erfc}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-z^2) dz,$$

$$\operatorname{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz,$$

$\operatorname{erf}x$ – функция ошибок Гаусса.

При помощи обратного преобразования Фурье, Гринберга и Ханкеля, получим решение задачи (4.29) – (4.32) в виде

$$P_j(r, \theta, z, t) = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\lambda_{mn}^2 \frac{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})}{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) - J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})} \times \right. \\ \left. \times V_m(\lambda_{mn} r) \cdot \phi_{mn\nu}(t) \cdot U_{jmn\nu}(z) \sin(m\theta) \right], \quad (j = 1, 2). \quad (4.47)$$

Рассмотрим поведение решения поставленной выше задачи (4.29) – (4.32) для однородных начальных и граничных условий. В этом случае задачи (4.29) – (4.32) при $M_1 = M_2 = 1$,

$q_{i1k} = q_1, q_{i2k} = q_2, h_{i1k} = h_1, h_{i2k} = h_2$ имеют вид:

$$P_j(r, \theta, z, t) = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\lambda_{mn}^2 \frac{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})}{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) - J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})} \times \right. \\ \left. \times V_m(\lambda_{mn} r) \cdot \phi_{mn\nu}^*(t) \cdot U_{jmn\nu}(z) \sin(m\theta) \right], \quad (j = 1, 2),$$

где

$$\phi_{mn\nu}^*(t) = \frac{\eta_{mn\nu}}{\sqrt{\pi\alpha^2 - 4\lambda_{mn\nu}}} \left[\frac{\lambda_{mn\nu}}{\sqrt{\pi\alpha^2 - 4\lambda_{mn\nu}}} + \frac{1}{\gamma_{mn\nu}} \exp(\gamma_{mn\nu}^2 t) \operatorname{erfc} \gamma_{mn\nu} t - \right. \\ \left. - \frac{1}{2_{mn\nu}} \exp(\alpha_{mn\nu}^2 t) \operatorname{erfc}(\alpha_{mn\nu} \sqrt{t}) \right] \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \eta_{mnv} = & A_{1mnv} \mu_0 \left[\frac{q_1 \chi_{1z}}{2\pi h_1 \mu_{1mnv}} V_m(\lambda_{mn} r_1) \sin(\mu_{1mn} h_1) \sin(m\theta_1) + \right. \\ & + \frac{\chi_{2z} q_2}{\pi h_2 \mu_{2mnv}} B_{mnv} V_m(\lambda_{mn} r_2) \cdot x \cdot \sin\left(\frac{h_2}{2} \mu_{2mn}\right) \times \\ & \left. \times \cos\left(\mu_{2mn} \left(b_2 - \frac{h_2}{2}\right)\right) \sin(m\theta_2) \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Из полученных решений (4.47), принимая $r = r_j = r_0$, $\theta = \theta_j$ ($j = 1, 2$) для однородных начальных и граничных условий после некоторых преобразований для осредненной по вскрываемой части пласта скважины находим значение безразмерное перепада давления:

$$\begin{aligned} \Delta P_{jc}(t) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \left[\lambda_{mn}^2 \frac{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) \cdot J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})}{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) - J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})} \times \right. \\ & \left. \times V_m(\lambda_{mn}(r_j + r_c)) \cdot \bar{\phi}_{mnv}(t) \cdot C_{jmnv} \cdot \sin(m\theta) \right] \quad (j = 1, 2), \quad (4.50) \end{aligned}$$

где

$$\Delta P_{jc}(t) = \frac{K_0 h_0 [P_0 - P_j(r_j + r_c, \theta_j, t)]}{\mu q_0}$$

$$C_{1mnv} = \frac{A_{1mnv}}{h_1 \mu_{1mnv}} \sin(\mu_{1mnv} h_1),$$

$$C_{2mnv} = 2 \frac{A_{1mnv} \cdot B_{mnv}}{\mu_{2mnv} h_2} \sin\left(\frac{h_2}{2} \mu_{2mnv}\right) \cdot \cos\left(\mu_{2mnv} \left(b_2 - \frac{h_2}{2}\right)\right)$$

$$\bar{\phi}_{mnv}^{(t)} = V_{mnv} \left[\frac{\lambda_{mnv}}{\sqrt{\pi\alpha^2 - 4\lambda_{mnv}}} + \frac{1}{\gamma_{mnv}} \exp(\gamma_{mnv}^2 t) \operatorname{erfc}(\gamma_{mnv} \sqrt{t}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\gamma_{mnv}} \exp(\gamma_{mnv}^2 t) \operatorname{erfc}(\gamma_{mnv} \sqrt{t}) \right]$$

$$V_{mnv} = \frac{K_0 h_0}{\sqrt{\pi\alpha^2 - 4\lambda_{mnv}}} \left[C_{1mnv} \bar{q}_1 \chi_{1z} V_m(\lambda_{mn} r_1) \sin(m\theta_1) + \right. \\ \left. + \frac{\bar{q}_2 \chi_{2z}}{2} C_{2mnv} V_m U_{2mn} \cdot \sin(m\theta_2) \right],$$

$$\bar{q}_j = \frac{\tau_j}{q_0}, \quad (j = 1, 2).$$

Для упругого режима решение вышеуказанной задачи (4.50) получается в следующем виде:

$$\Delta P_{jc}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \left[2 \frac{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) \cdot J_{m+1}(R_2 \lambda_{mn})}{J_{m+1}^2(R_1 \lambda_{mn}) - J_{m+1}^2(R_2 \lambda_{mn})} \times \right. \\ \left. \times V_m(\lambda_{mn}(r_i + r_c)) \cdot \phi_{mnv}^{(1)}(t) \cdot C_{jmnv} \cdot \sin(m\theta) \right], \quad (j = 1, 2) \quad (4.51)$$

$$\phi_{mnv}^{(1)}(t) = \bar{V}_{mnv} \frac{1}{\lambda_{mnv}} (1 - e^{-\lambda_{mnv} t}),$$

где

$$\bar{V}_{mnv} = K_0 h_0 \left[\bar{q}_1 \chi_{1z} C_{1mn} V_m(\lambda_{mn} r_1) \sin(m\theta_1) + \right. \\ \left. + \frac{\bar{q}_2}{2} \chi_{2z} \cdot C_{2mnv} V_{mn}(\lambda_{mn} r_2) \sin(m\theta_2) \right]$$

Проведение теоретических и численных исследований показывает, что ряды, входящие в (4.50) – (4.51), достаточно быстро сходятся. Поэтому для практического использования можно ограничиться несколькими членами этого ряда.

4.5. О нестационарном движении жидкости к скважинам в изолированных пластах с учетом ползучести сред

Деформационным свойствам коллектора при движении в нем жидкости и газа посвящено очень много работ.

При движении жидкости и газа к скважинам в пористой среде необходимо учитывать реологические свойства горных пород. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что деформационные свойства горных пород существенно влияют на характеристики течения жидкости и газа в пористой среде [21, 28, 56, 57, 65, 66, 88 и др.]. Задача фильтрации жидкости и газа к совершенным скважинам с учетом ползучести среды для однородного осесимметричного случая рассмотрена в [46].

Ниже рассматривается задача о фильтрации жидкости к системе скважин в двух изолированных друг от друга полосообразных пластах.

Предложим, что в прямоугольной области каждый пласт состоит из N кусочно-однородных зон. Каждая зона разрабатывается M_j ($j = \overline{1, N}$) скважинами, которые распо-

ложены в точках (x_{ijv}, y_{ijv}) и на контуре, ограничивающем область и удовлетворяет граничным условиям первого рода.

Процесс нестационарной фильтрации жидкости описывается следующими интегро-дифференциальными уравнениями типа свертки:

$$\begin{aligned} \Delta U_{ij}(x, y, t) + F_{ij}(x, y) &= \frac{1}{\chi_{ij}} \frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + \\ &+ \frac{1}{\chi_{ij} \beta_{жс}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t-\tau) U_{ij} d\tau, \quad (4.52) \\ (i=1, 2; \quad j=\overline{1, N}) \end{aligned}$$

Здесь Δ двухмерный оператор Лапласа; $U_{ij}(x, y, t) = P_0 - P_{ij}(x, y, t)$, $P_{ij}(x, y, t)$ - давление в точке (x, y) j -й зоны i -го пласта в момент времени t ; $F_{ij}(x, y, t)$ - функции, характеризующие наличие точечных источников (стоков); $R(t)$ - обобщенное ядро ползучести.

Рассмотрим уравнение (4.52) совместно с некоторым режимом разработки пласта. На внешних границах пласта зададим условия первого рода.

$$\begin{aligned} U_{ij}(x, y, t) \Big|_{x=0, L} &= f_i(y, t) \quad (0 \leq y \leq H, \quad t < +\infty); \\ U_{ij}(x, y, t) \Big|_{y=0, H} &= \varphi_i(x, t) \quad (0 \leq x \leq L, \quad t < +\infty) \quad (4.53) \\ (i=1, 2; \quad j=\overline{1, N}) \end{aligned}$$

На общих границах зон неоднородности имеет место условия сопряжения

$$U_{ij}(x, h_j - 0, t) = U_{i,j+1}(x, h_j + 0, t),$$

$$K_{ij} \frac{\partial U_{ij}(x, h_j - 0, t)}{\partial y} = K_{i,j+1} \frac{\partial U_{i,j+1}(x, h_j + 0, t)}{\partial y} \quad (4.54)$$

$$(j = \overline{1, N-1}, i = 1, 2)$$

Зададим начальные условия распределения давления в каждой зоне в момент времени

$$t = 0, U_{ij}(x, y, 0) = 0. \quad (4.55)$$

На дебиты и забойные давления скважин налагаются следующие условия:

$$\begin{cases} q_{ij\nu} + q_{c,j\nu} = Q_{j\nu} \\ U_{c,j\nu} = \overline{U}c_{2j\nu} \end{cases} \quad (j = \overline{1, N}) \quad (4.56)$$

где b_i - мощность пласта; H, L - ширина и длина пласта; $q_{ij\nu}$ - дебит ν -ой скважины, работающей в j -й зоне i -го пласта; $Q_{i\nu}$ - заданный суммарный дебит ν -й скважины и j -й зоне; M_j - число скважин в j -й зоне; $P_{cij\nu}$ - давление на забое скважины; K_{ij} - фильтрационные параметры i -го пласта j -й зоны.

$$F_{ij}(x, y) = \frac{\mu}{K_{ij}b_i} \sum_{\nu=1}^{M_j} Q_{ij\nu} \delta(x - x_{ij\nu}, y - y_{ij\nu}),$$

$$\chi_{ij} = K_{ij}\mu_0^{-1}m_0^{-1}\beta_m \quad (1, 2; j = \overline{1, N}),$$

Применяя для решения поставленной задачи (4.52)-(4.56) конечное синус преобразование Фурье по переменной x с ядром $\sin \lambda_m x$, учитывая свойства дельта-функции Дирака, получим:

$$\frac{\partial^2 U_{ijm}}{\partial y^2} - \lambda_m^2 U_{ijm} + F_{ijm}(y, t) = \frac{1}{\chi_{ij}} \frac{\partial U_{ijm}}{\partial t} + \frac{1}{\chi_{ij} \beta_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t - \tau) U_{ijm} d\tau,$$

$$U_{ijm}(y, t) \Big|_{y=0; H} = \varphi_{im}(t), \quad U_{ijm}(h_j - 0, t) = U_{i, j+1, m}(h_j + 0, t), \quad (4.57)$$

$$K_{ij} \frac{\partial}{\partial y} U_{ijm}(h - 0, t) = K_{i, j+1} \frac{\partial}{\partial y} U_{i, j+1, m}(h_j + 0, t) \quad (4.58)$$

$$(i = 1, 2; j = 1, \overline{N-1})$$

где

$$\lambda_m = \frac{\pi m}{L}, \quad U_{ijm}(y, t) = \int_0^L U_{ij}(x, y, t) \sin \lambda_m x dx,$$

$$\varphi_{im}(t) = \int_0^L \varphi_i(x, t) \sin \lambda_m x dx, \quad F_{ijm}(y, t) = \lambda_m f_1(y, t) - \lambda_m^2 f_2(y, t) +$$

$$+ \frac{\mu}{b_i K_{ij}} \sum_{v=1}^{M_j} Q_{ijv} \delta(y - y_{ijv}) \sin \lambda_m x_{ijv} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Рассмотрим совокупность собственных функций $\psi_{ijmn}(y)$ ($j = \overline{1, N}$), удовлетворяющих уравнению

$$\frac{d^2}{dy^2} \psi_{ijmn}(y) + \left(\frac{\lambda_{mn}}{\chi_{ij}} - \lambda_m^2 \right) \psi_{ijmn} = 0 \quad (4.59)$$

и условия сопряжения

$$\begin{aligned}
 \psi_{ijmn}(h_j - 0) &= \psi_{i,j+1,mn}(h_j + 0), \\
 K_{ij} \frac{\partial}{\partial y} U_{ijmn}(h_j - 0) &= K_{i(j+1)} \frac{\partial}{\partial y} U_{i(j+1)mn}(h_j + 0) \quad (4.60) \\
 &\quad (j = \overline{1, N-1})
 \end{aligned}$$

Здесь λ_{mn} - собственные значения соответствующей задачи (4.58)-(4.60) Штурма-Лиувилля. Функции $\psi_{ijmn}(y)$ на концах интервала удовлетворяют следующим однородным граничным условиям:

$$\psi_{ijmn}(0) = \psi_{ijmn}(H) = 0 \quad (i = 1, 2; j = \overline{1, N}). \quad (4.61)$$

Применяя к задаче (4.57)-(4.58) метод собственных функций Г.А.Гринберга [3], получим задачу типа Коши:

$$\begin{aligned}
 a \frac{d}{dt} \Phi_{imn}(t) + b \frac{d}{dt} \int_0^t R(t-\tau) \Phi_{imn}(\tau) d\tau &= \\
 &= -a \lambda_{mn} \Phi_{imn}(t) + V_{imn}(t) \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \Phi_{imn}(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{h_j}^{h_{j+1}} U_{ijn}(y, t) \psi_{ijmn}(y) dy, \\
 V_{imn}(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{h_j}^{h_{j+1}} F_{ijn}(y, t) \psi_{ijmn}(y) dy, \\
 a &= \mu_0 m_0 \beta_{жс}, \quad b = m_0 \mu_0.
 \end{aligned}$$

Начальное условие для уравнения (4.62) имеет вид

$$\Phi_{imn}(0) = 0. \quad (4.63)$$

Решение задачи (4.62)-(4.63) после применения преобразования Лапласа получим в классе изображений в виде:

$$\Phi_{imn}(s) = \frac{V_{imn}(s)}{as + bsR(s) + a\lambda_{mn}}. \quad (4.64)$$

Пусть ядро ползучести представляется в виде ядра Абеля

$$R(t) = \frac{\delta_1}{\sqrt{t - \tau}}.$$

Тогда из (4.64) получим

$$\Phi_{imn}(s) = \frac{1}{a(\eta_{mn} - \theta_{mn})} V_{imn}(s) \left(\frac{1}{\sqrt{s + \theta_{mn}}} - \frac{1}{\sqrt{s + \eta_{mn}}} \right). \quad (4.65)$$

Здесь

$$\eta_{mn} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4\lambda_{mn}}}{2}, \quad \theta_{mn} = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4\lambda_{mn}}}{2}, \quad c = \frac{\delta_1 \sqrt{\pi}}{\beta_{жс}},$$

где δ_1 - параметр ползучести.

Применяя теорему о свертке к (4.65), будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi_{imn}(t) = & \frac{1}{a(\eta_{mn} - \theta_{mn})} \int_0^t V_{imn}(t - \tau) \times \\ & \times [\eta_{mn} \exp(\eta^2 \tau) \operatorname{erfc}(\eta_{mn} \sqrt{\tau}) - \theta_{mn} \exp(\theta_{mn}^2 \tau) \operatorname{erfc}(\theta_{mn} \sqrt{\tau})] d\tau. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Предполагая, что $U_{ij}(x, y, t)$ допускает разложение в ряд по фундаментальным функциям $\psi_{ijmn}(y)$ однородной задачи и используя обратные преобразования Фурье и Гринберга, находим решение поставленной задачи в виде:

$$U_{ij}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{imn}(t) \psi_{ijmn}(y) \sin \frac{\pi m}{L} x. \quad (4.67)$$

После определения вида функции $U_{ij}(x, y, t)$ используя условия (4.56), можно найти неизвестные дебиты q_{ijv} . Подставляя найденные значения дебитов в (4.67), окончательно определяем давление в каждой зоне соответствующего пласта. Рассмотрим поведение решения поставленной выше задачи (4.52)-(4.56) для однородных начальных и граничных условий в случае, когда пласт состоит из двух зон с разными коэффициентами проницаемости. При этом $M_1 = M_2 = 1$, $q_{11} = q_{21} = q$, $q_{12} = q_{22} = q$, $b_1 = b_2 = b$.

$$\Phi_{imn}(t) = \eta_{imn} \left\{ \frac{1}{a_{mn}} \left[1 - \exp(a_{mn}^2 t) \operatorname{erfc}(a_{mn} \sqrt{t}) - \frac{1}{\beta_{mn}} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \exp(\beta_{mn}^2 t) \operatorname{erfc}(\beta_{mn} \sqrt{t}) \right] d\tau \right\}, \quad (4.68)$$

$$\eta_{imn} = \frac{\sigma_{imn}}{\sqrt{c^2 - 4\gamma_{mn}}}, \quad \sigma_{imn} = \frac{2q}{m_0 b \beta_{эс}} [\psi_{imn}(y_{1i}) \sin \lambda_m x_{i1} + \psi_{imn}(y_{2i}) \lambda_m x_{i2}],$$

$$a_{mn} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4\gamma_{mn}}}{2}, \quad \beta_{mn} = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4\gamma_{mn}}}{2}, \quad \gamma_{mn} = \frac{\lambda_{mn}}{m_0 \mu_0 \beta_{эс}},$$

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x, \quad \operatorname{erfc} v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-x^2) dx, \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx,$$

$erfx$ - функция ошибок Гаусса.

Собственные функции соответствующей задачи имеют вид:

$$\psi_{i1mn}(y) = B_{i1mn} \sin \mu_{1mn}^{(i)} y, \tag{4.69}$$

$$\psi_{i2mn}(y) = B_{i1mn} \frac{\sin \mu_{1mn}^{(i)} h_1}{\sin \mu_{2mn}^{(i)} (H - h_1)} \sin \mu_{2mn}^{(i)} (H - y).$$

Коэффициенты B_{i1mn} определяются из условия нормированности функций $\psi_{i1mn}(y)$ и $\psi_{i2mn}(y)$ в следующем виде:

$$B_{i1mn} = \sqrt{2} \left[\frac{K_{i1}}{\chi_{i1}} \left(h_1 - \frac{\sin 2\mu_{1mn}^{(i)} h_1}{2\mu_{1mn}^{(i)}} \right) + \frac{K_{i2} \sin^2 \mu_{1mn}^{(i)} h_1}{\chi_{i2} \sin^2 \mu_{2mn}^{(i)} h_2} \left(H - h_1 - \frac{\sin 2\mu_{2mn}^{(i)} h_2}{2\mu_{2mn}^{(i)}} \right) \right]^{-1/2}.$$

Собственные числа $\mu_{2mn}^{(i)}$ определяются из следующих трансцендентных систем:

$$\begin{cases} K_{i1} \mu_{1mn}^{(i)} \operatorname{ctg} \mu_{1mn}^{(i)} h_1 + K_{i2} \mu_{2mn}^{(i)} \operatorname{ctg} \mu_{2mn}^{(i)} (H - h_1) = 0 \\ K_{i1} \left((\mu_{1mn}^{(i)})^2 + \lambda_m^2 \right) = K_{i2} \left((\mu_{2mn}^{(i)})^2 + \lambda_m^2 \right) \end{cases} \tag{4.70}$$

В этом случае решение задачи (4.62)-(4.63) имеет вид:

$$U_i(x, y, t) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{imn}(t) \Psi_{ijn}(y) \sin \frac{\pi m}{L} x. \quad (4.71)$$

В частности, при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, будем иметь

$$\sigma_{imn} = \frac{q}{m_0 \beta_{жс}} \Psi_{imn}(y) \sin \lambda m x.$$

Учитывая, что $x = x_1 + r_c$, $y = y_1$, из (4.71) получим:

$$U_{ci}(x_1 + r_c, y_1, t) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{imn}(t) \Psi_{1mn}(y_1) \sin \frac{\pi m(x_1 + r_c)}{L}. \quad (4.72)$$

В этом случае q_{11}, q_{21} определяются из условий $q_{11} + q_{21} = Q$, $U_{c11} = U_{c21}$ в виде

$$q^* = \frac{q_{11}}{Q} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{2mn}(t) \Psi_{1mn}(y_1) \sin \frac{\pi m(x_1 + r_c)}{L} \times \quad (4.73)$$

$$\times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{1mn} [g_{1mn}(t) + g_{2mn}(t)] \sin \frac{\pi m(x_1 + r_c)}{L} \right\}^{-1}$$

Здесь

$$\Phi_{imn} = g_{imn} q_n \quad (i=1, 2).$$

По формуле (4.73) проведены численные расчеты и построены соответствующие кривые на основании данных:

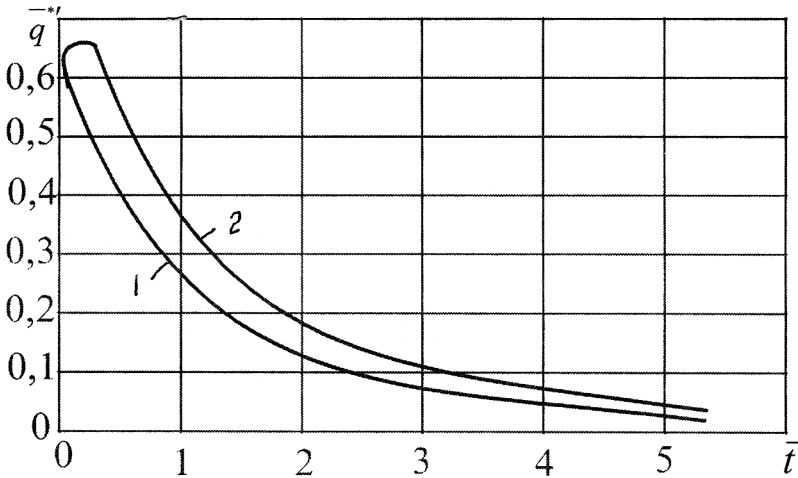
$$L = 1500 \text{ м}; H = 1000 \text{ м}; h_1 = 600 \text{ м}; x_1 = 400 \text{ м}; y_1 = 400;$$

$$\bar{q}^* = \frac{q^*}{q_0}; \bar{t} = \frac{t}{t_0}; t = 5 \text{ час}; 1 \text{ сум}; 6 \text{ мес.}; 1 \text{ год};$$

$$\delta_1 = 0,0021 \text{ (МПа}\cdot\text{сек)}^{-1/2}, m_0 = 0,2; \mu_0 = 10^{-4} \text{ Пас};$$

$$\beta_{жс} = 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}; K^* = 0,2; K^* = \frac{K_{12}}{K_{11}}.$$

Из графика видно, что с увеличением значения времени стабилизация расхода происходит через некоторое время после начала стадии разработки.



В начальной стадии разработки кривая 2 (с учетом ползучести) выпуклая, а с течением времени она асимптотически приближается к оси \bar{t} .

Из графиков видно, что с увеличением значения времени стабилизация расхода жидкости для кривой (без учета ползучести) происходит более плавно, чем для кривой 2 (с учетом ползучести).

С увеличением времени безразмерный дебит убывает, что объясняется замкнутостью пласта.

4.6. О решении интегро-дифференциальных уравнений фильтрации жидкости с учетом ползучих сред

Рассматривается задача о нестационарной фильтрации жидкости в неоднородном закрытом пласте с учетом ползучести среды и при наличии на забое скважин неполной песчаной пробки.

Поставленная задача имеет следующую математическую постановку: найти в области

$$D_1 = \{0 \leq z \leq h, r_c \leq r \leq R_k\}, D_2 = \{0 \leq z \leq h_1, 0 \leq r \leq r_c\}$$

решение системы интегро-дифференциальных уравнений типа свертки:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial z^2} = \\ & = \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial U_j}{\partial t} + \frac{m_1}{\chi_j \beta_m} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \exp[-\gamma(t-r)] U_j dr \end{aligned} \quad (4.74)$$

при следующих начальных

$$U_j(r, z, t) \Big|_{t=0} = 0 \quad (j=1, 2) \quad (4.75)$$

и граничных

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ r_c \leq r \leq R_k}} = \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{\substack{z=h \\ r_c \leq r \leq R_k}} = 0, \\ & \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ 0 \leq r \leq r_c}} = 0, \end{aligned}$$

$$U_2 \Big|_{\substack{z=h_1 \\ 0 \leq r \leq r_c}} = U_c = const,$$

$$U_1 \Big|_{z=R_k} = U_k = const,$$

$$U_1 \Big|_{\substack{r=r_c \\ h_1 \leq z \leq h}} = U_c = const,$$

$$U_1 \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z \leq h_1}} = U_2 \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z \leq h_1}}, \quad (4.76)$$

$$K_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z \leq h_1}} = K_2 \frac{\partial U_2}{\partial r} \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z \leq h_1}}$$

условиях.

Здесь $U_j = P_0 - P_j(r, z, t)$, $\chi = K_j \mu_0^{-1} m_0^{-1} \beta_m^{-1}$, K_1 , K_2 , h и h_1 - проницаемости и мощности пласта и песчаной пробки.

На общей границе пласта давление задается в виде:

$$U_1 \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z \leq h_1}} = U_2 \Big|_{\substack{r=r_c \\ 0 \leq z \leq h_1}} = U_c + \sum_{j=1}^n a_j \left[\cos \frac{\pi j}{h} z - \cos \pi j \right]. \quad (4.77)$$

Применяя для решения поставленной задачи (4.74)-(4.76) конечное косинус-преобразование Фурье [84] по переменной z с ядром $\cos \mu_m z$, $\cos \lambda_m z$, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_m}{\partial r} - \mu_m^2 U_m = \\ & = b_1 \frac{\partial U_m}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \exp[-\gamma(t-\tau)] U_{1m} d\tau, \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial^2 U_{2m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{2m}}{\partial r} - \lambda_m^2 U_{2m} + (-1)^{m+1} \lambda_m U_c =$$

(4.79)

$$= b_2 \frac{\partial U_{2m}}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \exp[\gamma(t-r)] U_{2m} dz,$$

где

$$U_{1m} = \int_0^h U_1 \cos \mu_m z dz, \quad U_{2m} = \int_0^h U_2 \cos \lambda_m dz,$$

$$\mu_m = \frac{\pi m}{h}, \quad \lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2h_1} \quad (m=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_j = \frac{1}{\chi_j}, \quad C_j = \frac{m_1}{\chi_j \beta_m} \quad (j=1, 2).$$

Начальные и граничные условия (4.75)-(4.76)

$$U_{1m}|_{r=R_k} = U_{1mk} = 0, \quad U_{2m} \neq \infty,$$

$$U_{1m}|_{r=r_c} = U_{1mc} =$$

$$= \sum_{j=1}^n a_j (-1)^j \sin \mu_m h_1 \left[\frac{1}{2 \left(\frac{\pi j}{h_1} + \mu_m \right)} - \frac{1}{2 \left(\frac{\pi j}{h_1} - \mu_m \right)} - \frac{1}{\mu_m} \right], \quad (4.80)$$

$$U_{2m}|_{r=r_c} = U_{2mc} =$$

$$= (-1)^{m+1} \left\{ U_j \frac{1}{\lambda_m} + \sum_{j=1}^n a_j (-1)^j \left[\frac{1}{2 \left(\frac{\pi j}{h_1} + \mu_m \right)} - \frac{1}{2 \left(\frac{\pi j}{h_1} - \mu_m \right)} - \frac{1}{\lambda_m} \right] \right\}.$$

После использования нами преобразования Лапласа, задача (4.78)-(4.80) примет вид:

$$\frac{d^2 \bar{U}_{1m}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{U}_{1m}}{dr} - \eta_{1m}^2 \bar{U}_{1m} = 0, \quad (4.81)$$

$$\frac{d^2 \bar{U}_{2m}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{U}_{2m}}{dr} - \eta_{2m}^2 \bar{U}_{2m} + (-1)^{m+1} U_c \frac{\lambda_m}{s} = 0, \quad (4.82)$$

$$\bar{U}_{1m}|_{r=r_c} = \frac{\bar{U}_{1mc}}{S},$$

$$\bar{U}_{2m}|_{r=r_c} = \frac{\bar{U}_{2mc}}{S}, \quad (4.83)$$

$$\bar{U}_{1m}|_{r=R_k} = 0$$

где

$$\bar{U}_{jm} = \int_0^{\infty} U_j e^{-St} dt \quad (j=1, 2),$$

$$\eta_{1m}^2 = \frac{b_1 S + (\mu_m^2 + b_1 \gamma + c_1) S + \mu_m^2 \gamma}{S + \gamma},$$

$$\eta_{2m}^2 = \frac{b_2 S + (\lambda_m^2 + b_2 \gamma + c_2) S + \lambda_m^2 \gamma}{S + \gamma}$$

Решение задачи (4.81)-(4.83) в классе изображений имеет вид:

$$\bar{U}_{1m} = \frac{U_{1mc} K_0(\mu_{1m} R_k) I_0(\eta_{1m} r) - I_0(\gamma_{1m} R_k) K_0(\eta_{1m} r)}{S I_0(\eta_{1m} r_c) K_0(\eta_{1m} R_k) - I_0(\eta_{1m} R_k) K_0(\eta_{1m} r_c)}, \quad (4.84)$$

$$\bar{U}_{2m} = \left[\frac{U_{2mc}}{S} - (-1)^{m+1} U_c \frac{\lambda_m}{\eta_{2m}^2} \right] \frac{I_0(\eta_{2m} r_c)}{I_0(\eta_{2m} r_c)} + (-1)^{m+1} U_c \frac{\lambda_m}{S \eta_{2m}^2},$$

здесь I_0, K_0 - Бесселевы функции мнимого аргумента первого и второго рода. Так как точный переход от Лапласовых изображений к оригиналам представляет большую математическую трудность, то ограничимся приближенным решением. Используя метод Тер-Хаара о приближенном обращении преобразования Лапласа и обратное преобразование Фурье, получим:

$$U_1 = \frac{1}{h} U_{10}(0, t) + \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}(r, t) \cos \mu_m z, \quad (4.85)$$

$$U_2 = \frac{1}{h_1} U_{20}(0, t) + \frac{2}{h_1} \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}(r, t) \cos \lambda_m z, \quad (4.86)$$

$U_{jm}(r, t)$ - является приближенным обращением преобразования Лапласа функции \bar{U}_{jm} :

$$U_{1m}(r, t) = I_{1mc} \frac{K_0(\theta_{1m} R_k) I_0(\theta_{1m} r) - I_0(\theta_{1m} R_k) K_0(\theta_{1m} r)}{I_0(\theta_{1m} r_c) K_0(\theta_{1m} R_k) - I_0(\theta_{1m} R_k) K_0(\theta_{1m} r_c)}, \quad (4.87)$$

$$U_{2m}(r, t) = \left[U_{2mc}^t - (-1)^{m+1} U_c \frac{\lambda_m}{\theta_{2m}^2} \right] \frac{I_0(\theta_{2m} r_c)}{I_0(\theta_{2m} r_c)} + (-1)^{m+1} U_c \frac{\lambda_m}{\theta_{2m}^2}, \quad (4.88)$$

где

$$\theta_{1m}^2(t) = \frac{\mu_m^2 \mathcal{N}^2 + (\mu_m^2 + b_1 \gamma + c_1)t + b_1}{t(1 + \mathcal{N})},$$

$$\theta_{2m}^2(t) = \frac{\lambda_m^2 \mathcal{N}^2 + (\lambda_m^2 + b_2 \gamma + c_2)t + b_2}{t(1 + \mathcal{N})}.$$

Коэффициенты a_j определяются из следующих интегральных соотношений:

$$K_1 \int_{\frac{(v-1)h_1}{n}}^{\frac{vh_1}{n}} \frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{r=r_c} dz = K_2 \int_{\frac{(v-1)h_1}{n}}^{\frac{vh_1}{n}} \frac{\partial U_2}{\partial r} \Big|_{r=r_c} dz. \quad (4.89)$$

При помощи формулы (4.85)-(4.86) можно определить давление в любой точке пласта для любого момента времени.

4.7. Математическое моделирование фильтрации жидкости в средах с различными ядрами ползучести

Деформационные свойства горных пород существенно влияют на фильтрацию жидкости и газа в пористых (или трещиноватых, трещиновато пористых) средах. Экспериментальному исследованию деформационных свойств нефтесодержащих пластов в связи с фильтрацией в них жидкостей и газов посвящено большое количество работ.

Проведенные исследования показывают, что связь между деформацией и напряжением имеет релаксационный характер, что свидетельствует о необходимости учета в расчетах фильтрационных течений запаздывающего характера.

В данном параграфе рассматривается задача о притоке жидкости к скважинам в ползучей среде с учетом различных ядер ползучести.

Исследование свойств ползучести горных пород основано на опытных данных с развивающимися во времени значениями деформации и напряжения.

Задача изучения закономерностей деформирования материалов во времени является сложной и требует глубоких теоретических и лабораторных исследований.

Учет ползучести различных грунтов при фильтрации жидкости и газа, описываемой интегро-дифференциальным уравнением, характеризуется определенной зависимостью между деформацией и напряжением. Ядро этого интегро-дифференциального уравнения называется ядром ползучести.

Укажем некоторые аналитические виды ядра ползучести:

- ядро Л.Больцмана:

$$L(t, \tau) = \frac{a}{t - \tau},$$

a - постоянная;

-экспоненциальное ядро:

$$L(t, \tau) = \theta e^{-\lambda(t-\tau)}, \quad \lambda = \text{const}.$$

-ядро Абеля:

$$L(t, \tau) = \delta(t - \tau)^{-\alpha},$$

α, δ - постоянные, $0 < \alpha < 1$;

- ядро Ф.Р.Ржаницына:

$$L(t, \tau) = \frac{Ae^{-c(t-\tau)}}{(t - \tau)^{1-\alpha}},$$

A, c, α - постоянные;

- ядро Ю.Н.Работнова:

$$R(t) = t^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^m}{\tau^{\gamma(n+1)} \tilde{A}[\lambda(\delta + 1)]},$$

где $0 < \gamma \leq 1$, τ_1 - время релаксации; \tilde{A} - гамма функция и др.

Представляет интерес при одних и тех же условиях дать сравнительный анализ полученных решений с учетом различных видов ядер, учитывающих ползучесть пласта.

Пусть в бесконечном ползучем пласте работает прямолинейная галерея. Требуется найти в любой точке пласта распределение давления, вызванного пуском такой галереи.

Поставленная задача имеет следующую математическую постановку. Найти в области $(0 \leq x < +\infty)$ решение интегро-дифференциальных уравнений типа свертки;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi} + \frac{a_1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t-\tau)U(x,\tau)d\tau, \quad (4.90)$$

при следующих начальных

$$U(x,t)|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x < +\infty$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{\mu Q}{Kh}, \quad U|_{x \rightarrow +\infty} = 0, \quad (4.91)$$

граничных условиях.

Здесь

$$U(x,t) = p_0 - p(x,t), \quad \chi = \frac{K}{\mu m \beta_m}, \quad a_1 = \frac{1}{\beta_m},$$

h - мощность пласта; Q - дебит галереи.

Применяя для решения задачи (4.90) - (4.91) преобразование Лапласа по времени, получим в пространстве изображений следующую задачу:

$$\frac{d^2 \bar{U}}{dx^2} - \frac{s}{\chi} [1 + a_1 R(s)] \bar{U} = 0. \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{\mu Q}{sKh}, \quad \bar{U} \Big|_{x \rightarrow +\infty} = 0, \quad (4.93)$$

где

$$\bar{U}(x,s) = \int_0^\infty U(x,t)e^{-st} dt, \quad R(s) = \int_0^\infty R(t)e^{-st} dt.$$

Решение уравнения (4.92) при условии (4.93) имеет вид:

$$U(x, s) = \frac{\mu Q}{Kh} \cdot \frac{\exp(-\varphi(s))}{\varphi(s)}, \quad (4.94)$$

где $\varphi^2(s) = \frac{s}{\chi} [1 + a_1 R(s)]$.

Рассмотрим различные случаи:

1. Ядро ползучести представляется в виде экспоненциальной функции:

$$R(t - \tau) = m_1 \exp[-\gamma(t - \tau)],$$

где m_1 - параметр ползучести, $m_1 > 0$, γ^{-1} - время релаксации породы.

В этом случае решение задачи (4.92) - (4.93) будет в виде:

$$\bar{U}(x, s) = \frac{\mu Q}{Kh} \cdot \frac{\exp(-\varphi(s))}{\varphi(s)}, \quad (4.95)$$

здесь $\varphi^2(s) = \frac{1}{\chi} \frac{s^2(a + \gamma)s}{s + \gamma}$.

Используя метод Тер-Хаара о приближенном обращении преобразования Лапласа, получим:

$$U(x, t) = \frac{\mu Q}{Kh} \frac{\exp\left[-\sqrt{\frac{1+(a+\gamma)t}{\chi t(1+\gamma t)}} x\right]}{\sqrt{\frac{1+(a+\gamma)t}{\chi t(1+\gamma t)}}}. \quad (4.96)$$

Если в формуле (4.96) принять $x = 0$, то найдем

значение переменного безразмерного забойного давления в виде:

$$\Delta P_c(t) = \sqrt{\frac{\chi t(1+\gamma t)}{1+(a+\gamma)t}}, \quad (4.97)$$

где

$$\Delta P_c(t) = \frac{kh(P_0 - P_c(t))}{\mu Q}, \quad a = \frac{m_1}{\beta_e}.$$

2. Ядро ползучести представляется в виде ядра Абеля:

$$R(t-\tau) = \frac{\delta_1}{\sqrt{t-\tau}}.$$

В этом случае (4.94) имеет вид:

$$\bar{U} = \frac{\mu Q}{Kh} \cdot \frac{\exp[-\psi(s)]x}{\psi(s)}, \quad (4.98)$$

где $\psi^2(s) = \frac{1}{\chi} (s + b\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{s})$, $b = \frac{\delta_1}{\beta_e}$.

Используя метод Тер-Хаара, из (4.98) имеем:

$$U = \frac{\mu Q}{Kh} \frac{\exp\left[-\sqrt{\frac{1}{\chi t}(1+b\sqrt{\pi}\sqrt{t})}x\right]}{\sqrt{\frac{1}{\chi t}(1+b\sqrt{\pi}\sqrt{t})}}. \quad (4.99)$$

Если в формуле (4.99) принять $x=0$, тогда получим безразмерный перепад давления в виде:

$$\Delta P_c = \sqrt{\frac{\chi t}{1+b\sqrt{\pi}t}}. \quad (4.100)$$

По формулам (4.97) - (4.100) проведены численные расчеты при следующих данных:

$$m_1 = 3,14 \cdot 10^{-8} ; \beta_{\text{е}} = 5 \cdot 10^{-3} ; \chi = 0,05 ; \delta_1 = 0,0021 ; a = 68 \cdot 10^{-7} ; \gamma = 4,3 \cdot 10^{-6} .$$
$$t = 36 \cdot 10^2 ; 18 \cdot 10^3 ; 2592 \cdot 10^3 ; 15552 \cdot 10^3 ; 31104 \cdot 10^3 ; 62208 \cdot 10^3 .$$

Результаты представлены в таблице.

Таблица.

Изменение давления в зависимости от времени для различных ядер.

t	P_1	P_2	P_1/P_2
3600	13,25756	2,028585	6,535374462
18000	28,42859	3,052793	9,312320523
2592000	229,9396	10,62574	21,6398758
15552000	551,3402	16,63447	33,14445228
31104000	777,9566	19,78286	39,32478664
62208000	1098,947	23,52678	46,71048799

Приведенные расчеты показывает, что для фиксированного значения времени разработки перепад давления, при прочих равных условиях, при экспоненциальном ядре меньше, чем при степенном.

При этом установлено, что при решении подобных задач параметры, входящие в гидродинамическую модель процесса фильтрации и характеризующие ползучесть пласта, для каждого конкретного случая должны определяться экспериментальным (промысловым) путем или решением обратных задач.

4.8. Решение уравнения фильтрации в неоднородной среде с учетом ползучести

В данном параграфе решается задача о фильтрации жидкости к скважинам в неоднородном конечном пласте с учетом ползучести сред. Каждый пласт разрабатывается соответственно N_1 и N_2 несовершенными скважинами, которые расположены в точке (r_{ji}, θ_{ji}) ($i=1, \overline{N_j}$, $j=1, 2$). Поставленная задача с помощью обобщенных функций имеет следующую математическую постановку: найти в области

$$D_1 = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h_1\},$$

$$D_2 = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, h_1 \leq z \leq h\}$$

решения системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} + \\ & + \sum_{i=1}^{N_j} \frac{\mu_{ji}}{2\pi k_j h r} \delta(r-r_{ji}, \theta-\theta_{ji}) [\sigma(z-h_{j-1}) - \sigma(z-h_{j-1}-b_{ji})] = \\ & = \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{1}{\chi_j \beta_{жс}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t [m_1 \exp(-\gamma_1(t-\tau)) + m_2 \exp(-\gamma_2(t-\tau))] u_j d\tau \\ & (j=1, 2) \end{aligned} \tag{4.101}$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$\begin{aligned}
 & u_j(r, \theta, z, t) \Big|_{t=0} = 0 \\
 & (R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h_1 \mid z \in D_1, \quad h_1 \leq z \leq h \mid z \in D_2), \\
 & \frac{\partial u_1(r, \theta, z, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_j} = f_j(\theta, z, t) \\
 & (0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h_1, \quad t < +\infty) \quad (j=1, 2) \\
 & \frac{\partial u_2(r, \theta, z, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_j} = \varphi_j(\theta, z, t) \\
 & (0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h_1 \leq z \leq h, \quad t < +\infty) \quad (j=1, 2) \\
 & \frac{\partial u_1(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \psi_1(r, \theta, t), \quad \frac{\partial u_2(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h} = \psi_2(r, \theta, t) \\
 & (R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad t < +\infty),
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

на общих границах имеем условия:

$$\begin{aligned}
 & u_1(r, \theta, z, t) \Big|_{z=h_1} = u_2(r, \theta, z, t) \Big|_{z=h_1}, \\
 & K_1 \frac{\partial u_1(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} = K_2 \frac{\partial u_2(r, \theta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} \\
 & (R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad t < +\infty)
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

На функции $u_j(r, \theta, z, t)$ по аргументу « θ » задается условие периодичности

$$u_j(r, \theta + 2\pi, z, t) = u_j(r, \theta, z, t) \quad (j=1, 2). \tag{4.104}$$

$(R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h_1 \mid z \in D_1, \quad h_1 \leq z \leq h \mid z \in D_2, \quad t < +\infty)$
 Здесь $u_j(r, \theta, z, t) = P_0 - P_j(r, \theta, z, t)$. На функции $f(r, \theta, z)$,

$f_j(\theta, z, t)$, $\varphi_j(\theta, z, t)$, $\psi_j(r, \theta, t)$ ($j = 1, 2$) налагаются условия, что они должны быть абсолютно интегрируемы по переменным (r, θ, z) и непрерывно-дифференцируемы по переменной t .

Для решения поставленной задачи (4.101)-(4.104), применяя конечное синус-преобразование Фурье по переменной « θ » с ядром $\sin(m\theta)$ и конечное преобразование Ханкеля, учитывая фильтрующие свойства дельта-функции Дирака, получим:

$$\begin{aligned} \eta_{mn}(z, t) - \lambda_{mn}^2 u_{1mn}(z, t) + \frac{\partial^2 u_{1mn}(z, t)}{\partial z^2} + F_{1mn}(z) = \\ = \frac{1}{\chi_1} \frac{\partial u_{1mn}(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{\chi_1 \beta_\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t - \tau) u_{1mn}(z, \tau) d\tau \\ \varphi_{mn}(z, t) - \lambda_{mn}^2 u_{2mn}(z, t) + \frac{\partial^2 u_{2mn}(z, t)}{\partial z^2} + F_{2mn}(z) = \\ = \frac{1}{\chi_2} \frac{\partial u_{2mn}(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{\chi_2 \beta_\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t R(t - \tau) u_{2mn}(z, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{jmn}(z, t) \Big|_{t=0} &= 0, & \frac{\partial u_{1mn}(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \Psi_{1mn}(t), \\ \frac{\partial u_{2mn}(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \Psi_{2mn}(t), & u_{1mn}(z, t) \Big|_{z=h_1} &= u_{2mn}(z, t) \Big|_{z=h_1}, \\ K_1 \frac{\partial u_{1mn}(z, t)}{\partial z} \Big|_{t=h_1} &= K_2 \frac{\partial u_{2mn}(z, t)}{\partial z} \Big|_{t=h_1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.106)$$

Ядро преобразования Ханкеля $V_{mn}(\lambda_{mn} r)$ имеет вид:

$$V_{mn}(\lambda_{mn} r) = \frac{\pi}{2} \left[J_m(\lambda_{mn} r) \frac{Y'_m(\lambda_{mn} r)}{J'_m(\lambda_{mn} r)} - Y_m(\lambda_{mn} r) \right],$$

λ_{mn} - является корнем характеристического уравнения

$$J_{m+1}(\lambda_{mn} R_1) Y_{m+1}(\lambda_{mn} R_2) - Y_{m+1}(\lambda_{mn} R_1) J_{m+1}(\lambda_{mn} R_2) = 0,$$

J_m, Y_m - функции Бесселя m -го порядка первого и второго рода.

где

$$\begin{aligned} u_{jmn}(z, t) &= \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} u(r, \theta, z, t) r V_m(\lambda_{mn} r) \sin(m\theta) d\theta dr \quad (j=1, 2), \\ \eta_{mn}(z, t) &= R_2 f_{2m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_2) - R_1 f_{1m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_1), \\ f_{jm}(z, t) &= \int_0^{2\pi} f_j(\theta, z, t) \sin(m\theta) d\theta \quad (j=1, 2), \\ \varphi_{mn}(z, t) &= R_2 \varphi_{2m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_2) - R_1 \varphi_{1m}(z, t) V_m(\lambda_{mn} R_1), \\ \varphi_{jm}(z, t) &= \int_0^{2\pi} \varphi_j(\theta, z, t) \sin(m\theta) d\theta \quad (j=1, 2), \\ F_{jmn}(z) &= \frac{\mu}{2\pi h} \sum_{i=1}^{N_j} \frac{q_{ij}}{K_i} V_m(\lambda_{mn} r_{ji}) \sin(m\theta_{ji}) \times \\ &\quad \times [\sigma(z - h_{j-1}) - \sigma(z - h_{j-1} - b_{ij})] \quad (j=1, 2), \\ \psi_{jmn}(t) &= \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \psi_j(r, \theta, t) r V_m(\lambda_{mn} r) \sin(m\theta) d\theta dr, \\ R(t - \tau) &= m_1 \exp(-\gamma_1(t - \tau)) + m_2 \exp(-\gamma_2(t - \tau)). \end{aligned} \tag{4.107}$$

Применяя метод собственных функций Г.А.Гринберга [3] к задаче (4.104)-(4.106), получим задачу типа Коши:

$$\frac{d\Phi_{mnv}(t)}{dt^2} + \frac{d}{dt} \int_0^t R(t - \tau) \Phi_{mnv}(\tau) d\tau + \lambda_{mn} \Phi_{mnv}(t) = F_{mnv}(t), \tag{4.108}$$

$$\Phi_{mnv}(t) \Big|_{t=0} = C_{mnv}, \quad (4.109)$$

где

$$\begin{aligned} F_{mnv}(t) &= \Psi_{mnv}(t) + \chi_2 \Psi_{2mn}(t) v(h)_{2mnv} - \chi_1 \Psi_{1mn}(t) v(0)_{1mnv} + A_{mnv}, \\ \Psi_{mnv}(t) &= \chi_1 \int_0^{h_1} \eta_{mn}(z, t) v_{1mnv}(z) dz + \chi_2 \int_{h_1}^h \phi_{mn}(z, t) v_{2mnv}(z) dz, \\ \Phi_{mnv}(t) &= \int_0^{h_1} u_{1mn}(z, t) v_{1mnv}(z) dz + \int_{h_1}^h u_{2mn}(z, t) v_{2mnv}(z) dz, \\ A_{mnv} &= \frac{\mu}{2\pi h} C_{1mnv} \left\{ \frac{\chi_1}{K_1 \mu_{1mnv}} \sum_{i=1}^{N_1} q_{1i} \sin(\mu_{1mnv} b_{1i}) \sin(m\theta_{1i}) V_m(\lambda_{mn} r_{1i}) + \right. \\ &+ \left. \frac{\chi_2}{K_2 \mu_{2mnv}} \sum_{i=1}^{N_2} q_{2i} \sin\left(\mu_{2mnv} \frac{b_{2i}}{2}\right) \cos\left(\mu_{2mnv} \left(h_2 - \frac{b_{2i}}{2}\right)\right) \sin(m\theta_{2i}) V_m(\lambda_{mn} r_{2i}) \right\}. \end{aligned}$$

Собственные функции $v_{jmnv}(z)$ ($j=1, 2$) имеют вид

$$\begin{aligned} v_{1mnv}(z) &= C_{1mnv} \cos \mu_{1mn} z, \\ v_{2mnv}(z) &= C_{1mnv} \frac{\cos \mu_{1mnv} h_1}{\cos \mu_{2mnv} h_2} \cos \mu_{2mnv} (h - z) \end{aligned} \quad (4.110)$$

Собственные числа μ_{jmnv} ($j=1, 2$), соответствующие задаче Штурма-Лиувилля, определяются из следующих трансцендентных систем уравнений:

$$\begin{aligned} K_1(\lambda_{mn}^2 + \mu_{1mnv}^2) &= K_2(\lambda_{mn}^2 + \mu_{2mnv}^2), \\ K_1 \mu_{1mnv} \operatorname{tg} \mu_{1mnv} h_1 + K_2 \mu_{2mnv} \operatorname{tg} \mu_{2mnv} h_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Коэффициенты C_{1mnv} - определяются из условия нормировки функции $v_{1mnv}(z)$ и $v_{2mnv}(z)$ в области D_1 и D_2 в виде:

$$C_{1mnv} = \sqrt{\frac{2}{\chi}} \left[h_1 + \frac{1}{2\mu_{1mnv}} \sin 2\mu_{1mnv} h_1 + \frac{\cos^2 \mu_{1mnv} h_1}{\cos^2 \mu_{2mnv} h_2} \left(h_2 + \frac{\sin 2\mu_{2mnv} h_2}{2\mu_{2mnv}} \right) \right]^{-1/2}.$$

Используя преобразование Лапласа, получим решение задачи (4.108)-(4.109) в классе изображений в виде:

$$\bar{\Phi}_{mnv}(s) = \frac{(s + \gamma_1)(s + \gamma_2)[F_{mnv}(s) + A_{mnv}]}{(s + \lambda_{mnv})(s + \gamma_1)(s + \gamma_2) + (a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2)s + (a_1 + a_2)\gamma_1\gamma_2}, \quad (4.112)$$

$$a_j = \frac{m_j}{\beta_{жс}}.$$

Так как точный переход от лапласовых изображений к оригиналам представляет большую математическую трудность, то ограничимся приближенным решением. Используя метод Тер-Хаара [5] о приближенном обращении преобразования Лапласа и обратное преобразование Фурье и Ханкеля, получим решение задачи (4.101)-(4.103) в виде:

$$u_j(r, \theta, z, t) = \pi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\lambda_{mn}^2 \frac{J_{m+1}^2(R_1\lambda_{mn}) + J_{m+1}^2(R_2\lambda_{mn})}{J_{m+1}^2(R_1\lambda_{mn}) - J_{m+1}^2(R_2\lambda_{mn})} \times \right. \\ \left. \times V_m(\lambda_{mn}r) \Phi_{mnv}(t) v_{jmnv}(z) \sin(m\theta) \right] \quad (j = 1, 2), \quad (4.113)$$

где

$$\Phi_{mnv}(t) = \frac{[\gamma_1\gamma_2 t^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)t + 1][F_{mnv}(t) + A_{mnv}]}{\alpha_{1mnv} t^3 + \alpha_{2mnv} t^2 + \alpha_{3mnv}},$$

$$\alpha_{1mnv} = \gamma_1\gamma_2\lambda_{mnv} + (a_1 + a_2)\gamma_1\gamma_2,$$

$$\alpha_{2mnv} = \gamma_1\gamma_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\lambda_{mnv},$$

$$\alpha_{3mnv} = \gamma_1 + \gamma_2 + \lambda_{mnv}.$$

Полученное решение (4.113) является разложением функции давления в ряд по собственным функциям

$v_{jmnv}(z)$ ($j=1, 2$), который сходится абсолютно во всех рассматриваемых замкнутых областях. Из полученных решений (4.113), принимая $r = r_j + r_i$, $\theta = \theta_j$, получим забойные давления. Если $m_1 = m_2 = 0$, то получим решение задачи для упругого режима.

Глава V.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ ЗАВОДНЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ДЕФОРМИРУЕМОГО ОДНОРОДНО-АНИЗОТРОПНОГО ПЛАСТА

5.1. Изучение влияния анизотропии проницаемости на коэффициент охвата

Как отмечено во введении, одним из факторов, влияющих на показатели процесса разработки нефтяных месторождений, является анизотропия пластов по проницаемости.

Исследованиями фильтрации жидкостей в анизотропных по проницаемости гранулярных средах занимался целый ряд авторов. Обзор этих работ можно найти.

Исследования в этой области показали, что свойством анизотропии по проницаемости, в основном, обладают трещиноватые пласты, проницаемость которых зависит не только от направления фильтрации, но и от пластового давления.

Простейшие фильтрационные потоки в анизотропных деформируемых коллекторах изучались в работах Е.С.Ромма, Г.И.Джалалова и др.

В данной главе с применением метода электро моделирования решены задачи фильтрации жидкости к скважинам при различной системе их расстановки в деформируемом анизотропном пласте.

Из-за сложности и трудоемкости получения аналитического решения, в данной работе приводятся полученные с помощью методов ЭГДА результаты исследований влияния анизотропии проницаемости на коэффициент охвата за безводный период при площадном заводнении деформируемого анизотропного пласта, проницаемость которого

зависит от угла ориентации и динамического пластового давления. При этом предполагается, что фильтрация жидкости подчиняется нелинейному закону. Взаимно перпендикулярные главные оси тензора анизотропии совпадают с осями координат x, y . Угол между осями x и \bar{x} равен ν , экстремальные начальные значения проницаемости в направлениях x, y различны (рис.5.1).

В этом случае установившееся движение жидкости будет описываться следующим нелинейным дифференциальным уравнением [34]:

$$k_x^0 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{k}_{\bar{x}}(P) \bar{\rho}(P)}{\bar{\mu}(P)} \frac{\partial P}{\partial x} \right] + k_y^0 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\bar{k}_{\bar{y}}(P) \rho(P)}{\bar{\mu}(P)} \frac{\partial P}{\partial y} \right] = 0 \quad (5.1)$$

где $\bar{k}_{\bar{x}}(P), \bar{k}_{\bar{y}}(P)$ - функции проницаемости в направлении оси \bar{x} и \bar{y} соответственно: k_x^0, k_y^0 - начальные значения проницаемости в направлении осей \bar{x}, \bar{y} при $P = P_0$:

$$\bar{\mu}(P) = \frac{\mu(P)}{\mu(P_0)}; \quad \bar{\rho}(P) = \frac{\rho(P)}{\rho(P_0)},$$

$\mu(P), \rho(P), \mu(P_0), \rho(P_0)$ - значения вязкости и плотности жидкости, соответственно, при текущем и начальном пластовом давлении.

P_0 - начальное пластовое давление. Считая, что закон изменения проницаемости от пластового давления по каждой координате одинаков, т.е. $\bar{k}_{\bar{x}}(P) = \bar{k}_{\bar{y}}(P) = f(P)$ и вводя функцию

$$\Phi(P) = \int_0^P \frac{f(P) \bar{\rho}(P)}{\bar{\mu}(P)} dP, \quad (5.2)$$

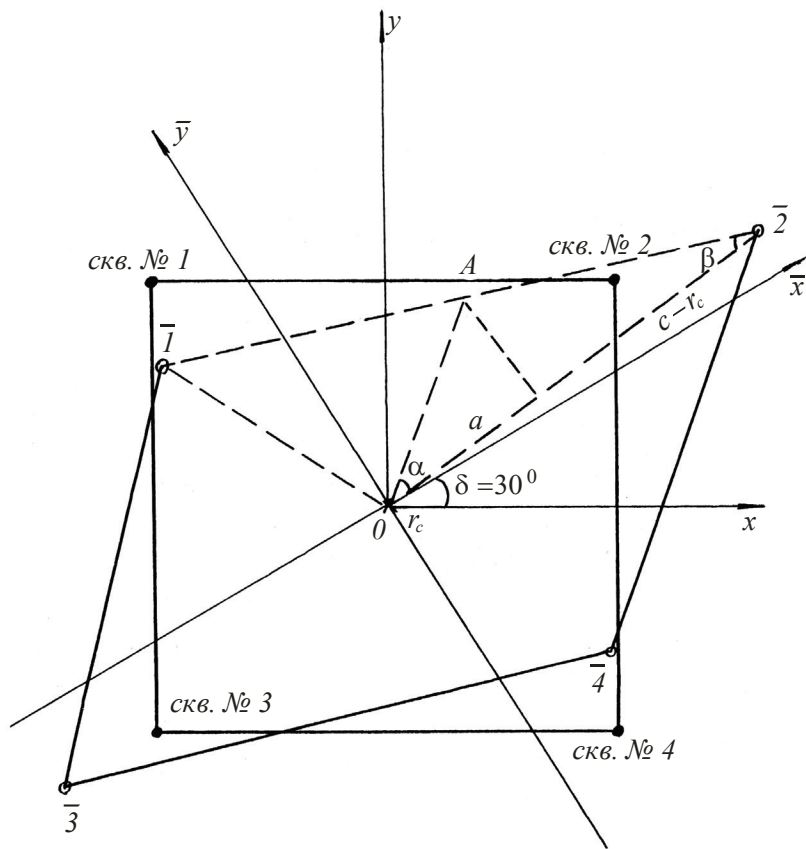


Рис. 5.1. Пятиточечная система расстановки скважин при $\delta = 30^\circ$ до аффинного преобразования (квадрат) и после (параллелограм).

после применения изотропизирующей деформации пространства, уравнение (5.1) можно представить в виде уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0, \quad (5.3)$$

где $\xi = \frac{\sqrt{k_y^0}}{C} \bar{x}$, $\eta = \frac{\sqrt{k_x^0}}{C} \bar{y}$, $C = \sqrt[4]{k_x^0 \cdot k_y^0}$,

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \delta + y \sin \delta \\ \bar{y} = y \cos \delta - x \sin \delta \end{cases} \quad (5.4)$$

Линейные размеры характерных отрезков x_0 , y_0 , взятых соответственно по осям Ox , Oy в плоскости $\xi O \eta$, преобразуются по формулам (рис.5.2):

$$\begin{aligned} \xi_0 &= x_0 C \sqrt{\frac{\cos^2 \delta}{k_x^0} + \frac{\sin^2 \delta}{k_y^0}}, \\ \eta_0 &= y_0 C \sqrt{\frac{\cos^2 \delta}{k_y^0} + \frac{\sin^2 \delta}{k_x^0}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Угол γ определяется из совместного решения уравнения прямых A_1B_1 и A_1D_1 (рис.5.2):

$$\gamma = \arctg \left(\sqrt{\frac{k_y^0}{k_x^0}} \operatorname{tg} \delta \right) + \arctg \left(\sqrt{\frac{k_y^0}{k_x^0}} \operatorname{ctg} \delta \right). \quad (5.6)$$

Были рассмотрены пятиточечная, семиточечная и девятиточечная системы площадного заводнения соответственно с расстоянием между скважинами 1000 м; 621,25 м; 500 м. Расстояния между скважинами выбирались из

условия равенства площадей элементов соответствующей системы заводнения.

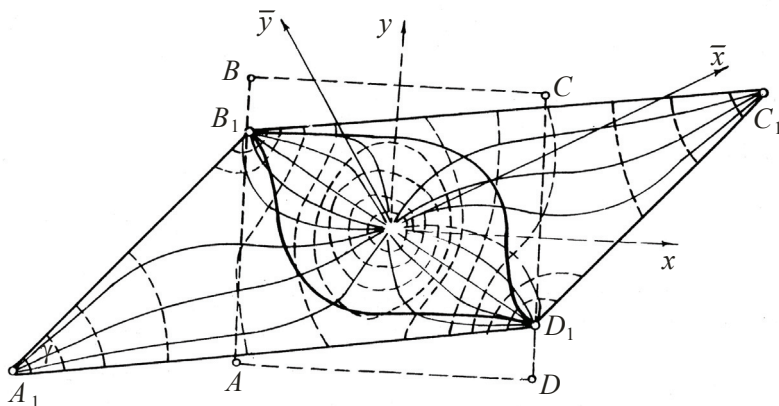


Рис. 5.2. Карта фильтрационного потока для элемента пятиточечной системы расстановки скважин.

 соответственно линии равных давлений,
 линии тока и положение ВНК.

При различных значениях степени анизотропии $k_{\bar{x}}^0 / k_{\bar{y}}^0$ угла ориентации главных осей тензора анизотропии проницаемости с учетом выражений (5.5) и (5.6) были сконструированы электрические модели преобразованных элементов. Количество электрических моделей соответствовало количеству рассмотренных случаев.

При моделировании приняты следующие исходные данные: шаг модели $M = 100$ м, $\rho_0 = 1$, $\bar{\mu}(P) = 1$, $\bar{\rho}(P) = 1$, радиус скважин $r = 0,1$ м, перепад давления между нагнетательной и эксплуатационной скважинами $\Delta P = 200$ ат,

отношение мощности h пласта и вязкости нефти μ_0 составляет $2 \cdot 10^4$ м/Па·сек. На границе области течения задавались условия непроницаемости.

По правилам электрического моделирования (17, 31) снималось гидродинамическое поле. Строилось положение водонефтяного контакта на определенное время. Далее по формуле (2.3) определялся коэффициент охвата.

Характер распространения фронта закачиваемой воды для всех систем расстановки скважин рассмотрен до момента обводнения первых скважин. Для примера на рис.5.2 показано положение этого фронта для пятиточечной системы расстановки скважин для случая, когда

$$k_x^0 / k_y^0 = g; \quad \delta = 30^\circ$$

На рисунках 5.3 и 5.4 для рассмотренных систем площадных заводнений соответственно показаны зависимости коэффициента охвата от угла ориентации главных осей тензора анизотропии проницаемости.

На рис.5.3 видно, что для пятиточечной системы расстановки скважин с ростом δ от 0° до 45° коэффициент охвата уменьшается для всех значений степени анизотропии. Наибольший коэффициент охвата получается в случае, когда $\delta = 0^\circ$ и 90° , а минимальный - при $\delta = 45^\circ$.

Для девятиточечной системы площадного заводнения наибольший коэффициент охвата получается при $\delta = 30^\circ$ или 60° . Минимальная величина коэффициента охвата достигается при $\delta = 0^\circ$ и 90° .

Семиточечная система характеризуется тем, что максимальная величина коэффициента охвата достигается при $\delta = 0^\circ$ или 60° , а при $\delta = 30^\circ$ коэффициент охвата имеет наименьшее значение.

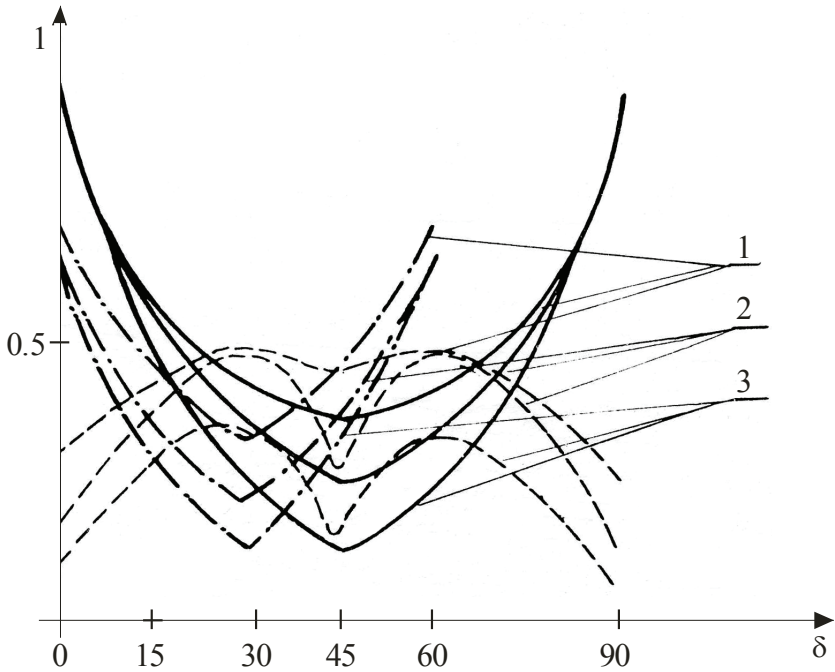


Рис. 5.3. Зависимость коэффициента охвата от угла ориентации при различной степени анизотропии

(1. $\frac{k_x}{k_y} = 4$; 2. $\frac{k_x}{k_y} = 9$; 3. $\frac{k_x}{k_y} = 25$.)

соответственно для пятиточечной, девятиточечной и семиточечной систем расстановки скважин

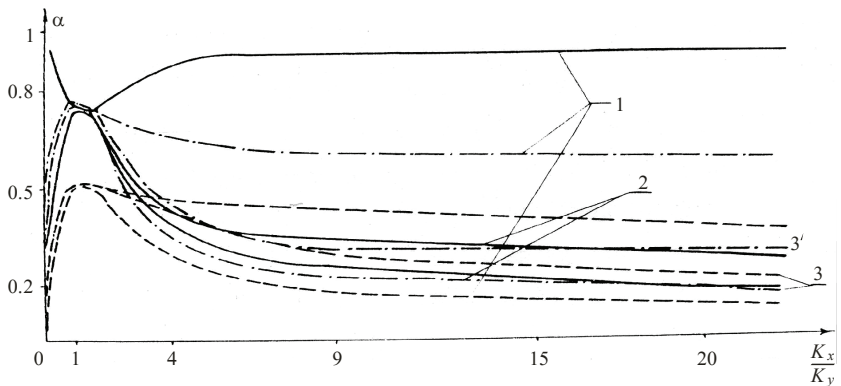


Рис. 5.4. Зависимость коэффициента охвата от степени анизотропии для различных углов ориентации:
1. $\delta = 0^\circ$; 2. $\delta = 30^\circ$; 3. $\delta = 45^\circ$; 3'. $\delta = 15^\circ$.

— — — — —
соответственно для пятиточечной, девятиточечной и семиточечной систем расстановки скважин

Сравнительный анализ показал, что наибольший коэффициент охвата дает пятиточечная система, в случае, когда $\delta = 0^\circ$ или 90° .

Из сравнения результатов, представленных на рис.5.4, можно заключить, что для всех рассмотренных систем заводнения в анизотропной среде коэффициент охвата меньше, чем в изотропной. Только в пятиточечной системе заводнения для $\delta = 0^\circ$ или 90° коэффициент охвата в анизотропной среде может быть больше коэффициента охвата в изотропной среде.

Более резкое изменение коэффициента охвата получается при

$$\frac{k_{\bar{x}}^0}{k_{\bar{y}}^0} < 1, \quad \text{чем при} \quad \frac{k_{\bar{x}}^0}{k_{\bar{y}}^0} > 1.$$

Зависимость проницаемости от давления не влияет на форму водонефтяного контакта и коэффициент охвата. Положение контура и коэффициент охвата будут такими же, как и при недеформируемой анизотропной трещиноватой среде, но время продвижения контура нефтеносности будет иным. Отношение времени перемещения ВНК в деформированной трещиноватой анизотропной среде к времени в недеформированной анизотропной трещиноватой среде при любых видах зависимости проницаемости от давления будет определяться по формуле [34]:

$$\frac{t_{\text{г.т.}}}{t_{\text{н.г.т.}}} = \frac{\Delta P_c}{\Delta \Phi_c}, \quad (5.7)$$

где $t_{\text{г.т.}}$, $t_{\text{н.г.т.}}$ - соответственно время продвижения ВНК в деформируемых и не деформируемых трещиноватых средах

$$\Delta \Phi_c = \int_{P_c}^{P_k} \frac{f(P)\bar{\rho}(P)}{\bar{\mu}(P)} dP \quad (5.8)$$

Таким образом, для различных систем площадного заводнения однородно-анизотропного деформируемого трещиноватого пласта с помощью электрической модели изучены некоторые вопросы перемещения ВНК и определены коэффициенты охвата по площади к моменту прорыва воды в эксплуатационные скважины.

Результаты экспериментов показывают, что при разработке деформируемых анизотропных трещиноватых пластов пятиточечная система площадного заводнения приводит к лучшим технологическим показателям, чем семиточечная и девятиточечная.

Предложена простая аналитическая формула, связывающая время продвижения ВНК в однородно-анизотропном трещиноватом деформируемом и недеформируемом пластах при любом виде зависимости проницаемости от пластового давления.

5.2. Влияние степени и угла ориентации анизотропии по проницаемости деформируемой среды на дебит скважин

В этом параграфе приводятся результаты расчетов по определению дебита скважин в деформируемом анизотропном пласте при исходных данных, приведенных в предыдущем параграфе.

На рис.5.5 даны зависимости $\frac{Q_{ан}}{Q_{из}}$ от угла ориентации анизотропии δ при различных значениях $\frac{k_{\bar{x}}}{k_{\bar{y}}}$ для скважин № 1 и № 2, которые находятся в отличающихся друг от друга условиях относительно значения проницаемости.

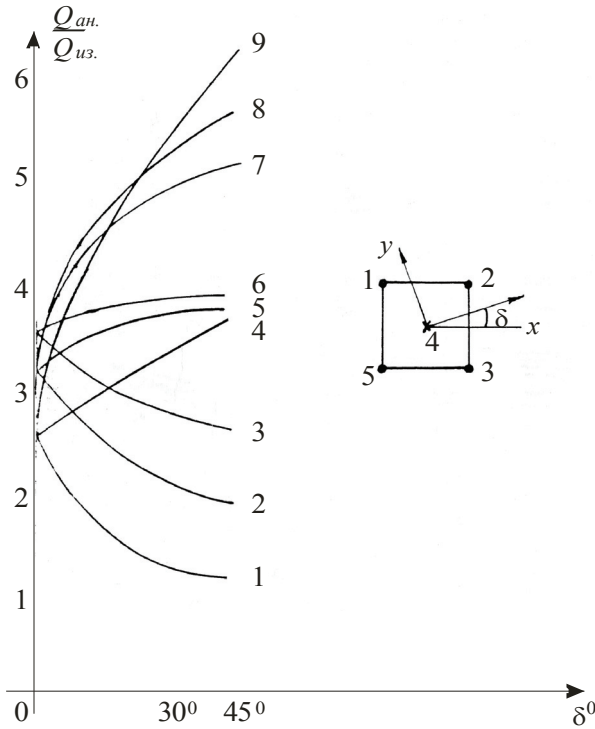


Рис. 5.5. Зависимость отношения $\frac{Q_{ан.}}{Q_{из.}}$ от угла

ориентации δ° при пятиточечной системе расстановки скважин

Кривые 1,4,9 построены соответственно для скважин

1,4,2 при $\frac{k_x}{k_y} = 25$; кривые 2,5,8 построены соответственно для

скважин 1,4,2 при $\frac{k_x}{k_y} = 9$; кривые 3,6,7 построены

соответственно для скважин 1,4,2 при $\frac{k_x}{k_y} = 4$

Из рисунка видно, что с ростом угла ориентации дебит скважины № 1 уменьшается, суммарный дебит – увеличивается.

На рис.5.6 показана зависимость $\frac{Q_{ан}}{Q_{из}}$ от степени анизотропии $\frac{k_{\bar{x}}}{k_{\bar{y}}}$ для различных значений угла ориентации.

Как, видно из графиков, с ростом степени анизотропии при всех значениях $\delta > 0$ для скважины № 2 происходит увеличение дебита, в то время как дебит скважины № 1 и суммарный дебит уменьшаются.

При $\delta = 0$ максимальное значение дебита скважины получается при $\frac{k_{\bar{x}}}{k_{\bar{y}}} = 1$.

Для девятиточечной системы расстановки скважин форма элемента до и после преобразования будет аналогична пятиточечной, только между угловыми эксплуатационными скважинами размещено еще по одной скважине.

Для этого элемента зависимость $\frac{Q_{ан}}{Q_{из}}$ от угла ориентации степени анизотропии показана соответственно на рис.5.7 и 5.8.

Из рисунков можно заключить, что для указанной системы расстановки скважин суммарный дебит не зависит от угла ориентации анизотропии, а с ростом степени анизотропии он постепенно уменьшается.

Элемент семиточечной системы после вышеуказанных преобразований будет иметь вид, показанный на рис.5.9. Для этой расстановки скважин зависимости безразмерных дебитов $k_{\bar{x}}/k_{\bar{y}}$ от угла ориентации и степени анизотропии показаны на рис.5.10.

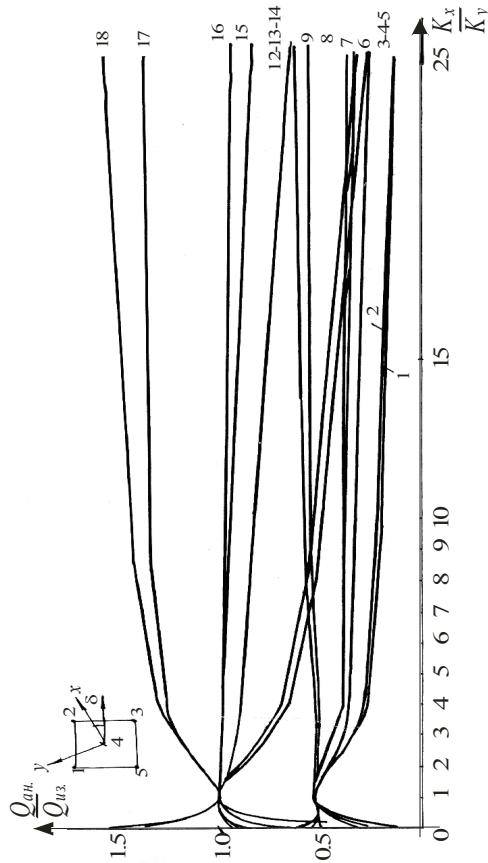


Рис. 5.6. Зависимость отношения $\frac{Q_{ан}}{Q_{из}}$ от $\frac{K_x}{K_y}$ при

пятиточечной системе расстановки скважин.

Кривые 3,4,5,12,13,14 построены соответственно для скважин 1,2,4 при $\delta^\circ = 0^\circ$; кривые 1,6,8,10,15,17 построены соответственно для скважин 1,4,2 при $\delta^\circ = 30^\circ$; кривые 2,7,9,11,16,18 построены соответственно для скважин 1,4,2 при $\delta^\circ = 45^\circ$; кривые 1÷9 для анизотропной деформируемой среды; кривые 10÷18 для анизотропной пористой среды

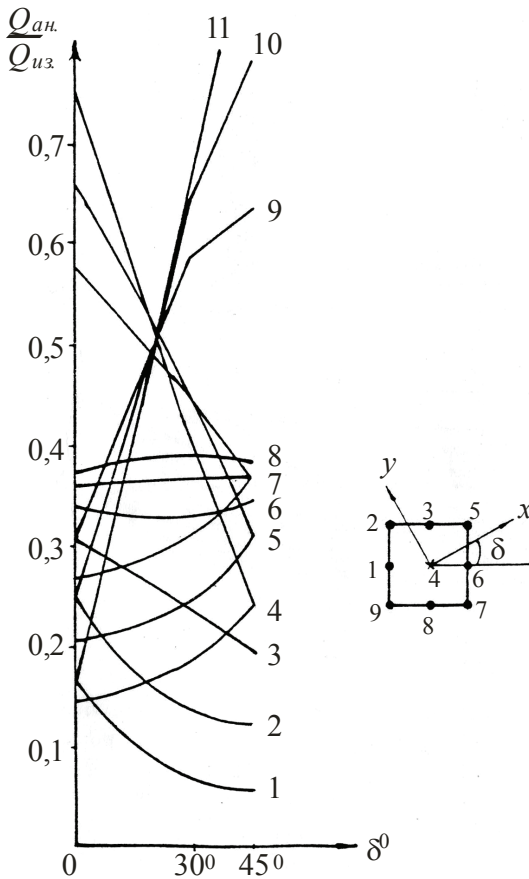


Рис. 5.7. Зависимость отношения $\frac{Q_{ан}}{Q_{из}}$ от угла

ориентации δ° при девятиотценной системе расстановки скважин.

Кривые 1,4,11,12 построены соответственно для скважин 2,1,5,3 при $k_x/k_y = 25$; кривые 2,5,6,10 построены соответственно для скважин 2,1,3,5 при $k_x/k_y = 9$; кривые 3,7,8,9 построены соответственно для скважин 2,1,3,5 при $k_x/k_y = 4$



Рис. 5.8. Зависимость $\frac{Q_{ан.}}{Q_{из.}}$ и $\frac{k_x}{k_y}$ при девятиточечной системе расстановки скважин.

Кривые 3,5,6,9,14,18,19,20,26,29 построены соответственно для скв. 1,2,5,4,3 при $\delta^\circ = 0^\circ$; кривые 1,4,10,12,13,17, 23, 24, 27, 28 построены соответственно для скв. 2,1,4,3,5 при $\delta^\circ = 30^\circ$; кривые 2, 7, 8,11,15,16,21,22,25,30 построены соответственно для скв. 2,1,3,4,5 при $\delta^\circ = 45^\circ$; кривые 1 ÷ 15 для анизотропной деформируемой среды; кривые 16 ÷ 30 для анизотропной пористой среды

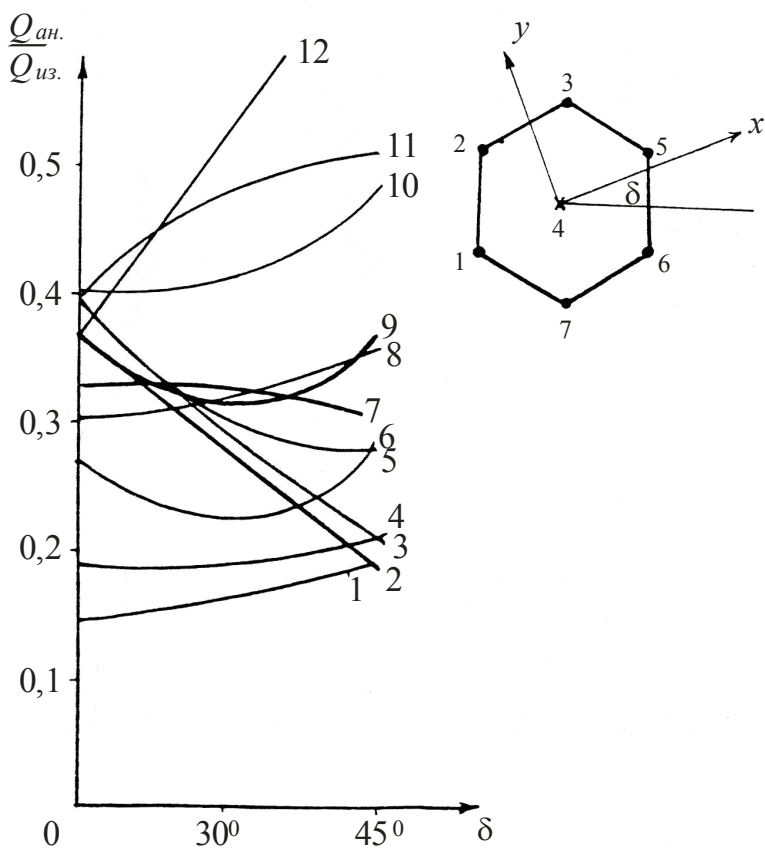


Рис. 5.9. Зависимость отношения $\frac{Q_{ан.}}{Q_{из}}$ от угла ориентации δ° при семиточечной системе расстановки скважин.

Кривые 1,3,8,12 построены соответственно для скважин 3,2,4,1 при $k_x / k_y = 25$; кривые 2,4,7,11 построены соответственно для скважин 3,2,4,1 при $k_x / k_y = 9$; кривые 5,6,9,10 построены соответственно для скважин 3,2,4,1 при $k_x / k_y = 4$



Рис. 5.10. Зависимость отношения $\frac{Q_{ан.}}{Q_{из.}}$ от $\frac{k_x}{k_y}$ при семиточечной системе расстановки скважин.

Кривые 1, 6, 8, 9, 13, 18, 21, 22 построены соответственно для скважин 3, 4, 1, 2 при $\delta^\circ = 0^\circ$; кривые 2, 5, 7, 11, 14, 17, 19, 23 построены соответственно для скважин 3, 2, 4, 1 при $\delta^\circ = 30^\circ$; кривые 3, 4, 9, 15, 16, 12, 20, 24 построены соответственно для скважин 3, 4, 2 при $\delta^\circ = 45^\circ$; кривые 1 ÷ 12 для анизотропной деформируемой среды; кривые 13 ÷ 24 для анизотропной пористой среды

Зависимости даны для скважин №№ 1,2,3 и 4. Характерной особенностью этих зависимостей для семиточечной системы заводнения относительно пяти- и девятиточечной является то, что только при $\delta = 0^\circ$ происходит плавное снижение суммарного дебита с увеличением степени анизотропии.

Для других же углов ориентации с увеличением отношения происходит вначале уменьшение суммарного дебита, а затем его увеличение.

Анализ результатов экспериментов показал:

- с увеличением степени анизотропии суммарный дебит для всех систем заводнения уменьшается,

- с ростом угла ориентации анизотропии суммарный дебит для пятиточечной системы увеличивается, для девятиточечной не изменяется, для семиточечной в зависимости от степени анизотропии может увеличиваться или уменьшаться.

Зависимость проницаемости от давления значительно влияет на производительность скважин. Для всех рассмотренных вариантов отношение дебита скважины в деформируемой среде к дебиту в гранулярной среде определяется по формуле:

$$\frac{Q_{гр.}}{Q_{пор.}} = \frac{1 - e^{-\alpha \Delta P}}{\alpha \Delta P} \quad (5.9)$$

При наших исходных данных разница в дебитах во всех рассмотренных вариантах составляет 47%.

5.3. Исследования условий ограничения подвижности газонефтяного контакта в деформируемом пласте

При разработке нефтегазовых залежей, сопровождающейся наличием в нефтяной оторочке водонагнетательных и эксплуатационных скважин, для обеспечения недеформируемости газонефтяного контакта (ГНК) целесообразно устанавливать необходимое соотношение между дебитами нагнетательного и эксплуатационного ряда скважин.

Характер деформации ГНК и прорыва газа в эксплуатационный ряд скважин зависит в данном случае от местоположения скважин, фильтрационных свойств флюидов, соотношения между количеством нагнетаемой в пласт воды и добытой нефти и т.д. Важно, что во всех случаях ранний прорыв газа приводит к снижению нефтеотдачи пласта.

В литературе на основании численного моделирования были изучены условия деформации ГНК при пуске в эксплуатацию нефтяных скважин и показаны характерные особенности этого процесса для условий однородного пласта.

Представляет интерес на основе аналитического решения обобщить эти исследования на предмет учёта анизотропии по проницаемости деформируемого пласта [34].

Предполагается, что в деформируемом анизотропном по проницаемости, ограниченном, полоосообразном пласте постоянной мощности работают нагнетательный и эксплуатационный ряды скважин (рис 5.8). На контуре ГНК принимается постоянное значение давления.

Проницаемости в направлении оси x и y , а также плотности и вязкости флюидов считаются заданными функциями давления [1, 2, 27 и др.].

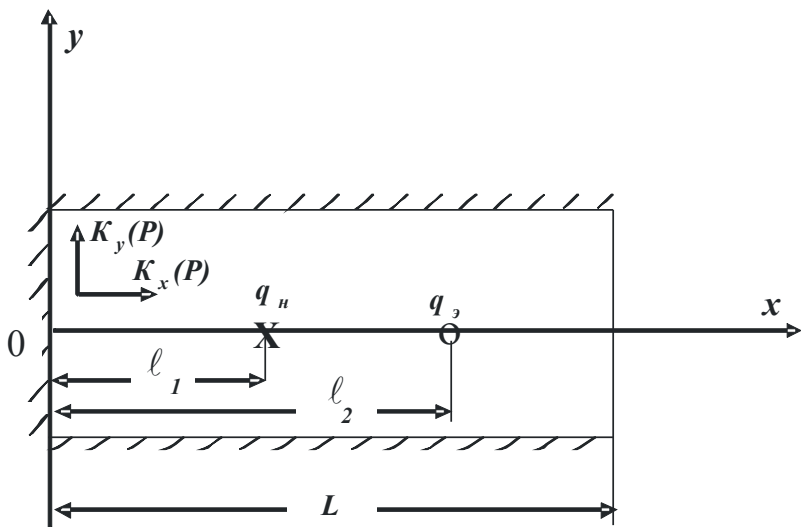


Рис.5.11. Размещение скважин при разработке нефтегазовых залежей
x – нагнетательные; *o* – добывающие

Требуется исследовать характер деформации ГНК, вызванного работой нефтяных скважин.

Математически указанная задача сводится к решению уравнения (5.1), в случае $\delta = 0^\circ$, при следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y=\pm\delta} = 0 \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad P \Big|_{x=L} = P_k \quad (5.11)$$

Считая, что изменения физических параметров жидкости и породы от давления подчиняются экспоненциальному закону

$$f(P) = \exp[\alpha_k (P - P_0)] ; \quad \bar{\rho}(P) = \exp[\alpha_\rho (P - P_0)] ; \\ \bar{\mu}(P) = \exp[\alpha_\mu (P - P_0)] ;$$

решение задачи (5.1), (5.10)-(5.11), используя метод разделения переменных, можно представить в виде:

$$P(\xi, \eta) = \frac{1}{\alpha} \ln[1 + \alpha\varphi(\xi, \eta)] \quad (5.12)$$

$$\varphi(\xi, \eta) = -\frac{\mu_0 q_H}{4\pi h \rho_0 \sqrt{K_{ox} K_{oy}}} \left\{ \ln \left[ch \frac{\pi(\xi - \ell_1)}{\bar{\delta}} - \cos \frac{\pi\eta}{\bar{\delta}} \right] - \ln 2 \right\} + \\ + \frac{\mu_0 q_3}{4\pi h \rho_0 \sqrt{K_{ox} K_{oy}}} \left\{ \ln \left[ch \frac{\pi(\xi - \ell_2)}{\bar{\delta}} - \cos \frac{\pi\eta}{\bar{\delta}} \right] - \ln 2 \right\} + Ax + B + (5.13) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \exp\left(\frac{\pi m \xi}{\bar{\delta}}\right) + B_m \exp\left(-\frac{\pi m \xi}{\bar{\delta}}\right) \right] \cos \frac{\pi m \eta}{\bar{\delta}}$$

Здесь $\xi = x$; $\eta = y \cdot K$; $K = \sqrt{\frac{k_x^0}{k_y^0}}$; $\bar{\delta} = \delta \cdot K$, $\alpha = \alpha_k + \alpha_\rho + \alpha_\mu$,

где α_k , α_ρ , α_μ - коэффициенты изменения, соответственно проницаемости, плотности и вязкости от давления, которые определяются опытным путём, А, В, A_m , B_m -известные коэффициенты.

Используя (5.12) и при $\eta=0$, $\eta = \bar{\delta}$ находя соответственно значения скорости по главной и нейтральной линиям тока и приравнивая выражения модулей скоростей

фильтрации, определим значение соотношения дебитов нагнетательных и эксплуатационных рядов скважин, при которых ограничивается деформация ГНК:

$$S = \frac{q_n}{q_s} = \frac{Sh \frac{\pi}{\delta} (L - \ell_1)}{Sh \frac{\pi}{\delta} (L - \ell_2)} \quad (5.14)$$

Средневзвешенное давление на линии эксплуатационного ряда скважин будет определяться по формуле

$$P_{cp} = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} P(\xi, \eta) d\eta \quad (5.15)$$

Подставляя значения S из (5.14) в (5.15), получим значения средневзвешенного давления на линии эксплуатационного ряда для условий ограниченной деформации ГНК.

По формулам при следующих исходных данных:

$$h=10\text{м}; \ell_1=100\text{м}; \ell_2=500\text{м}; \delta=150\text{м}; P_0=9806600\text{Па};$$

$$\tau_c=0,1\text{м}; q_s=0,868 \text{ кг/сек}; \rho=869\text{кг/м}^3;$$

$$K_{0y}=0,505 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2; \mu=10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$$

проведены расчёты, результаты которых представлены ниже.

На рис. 5.12 показано относительное распределение скоростей фильтрации вдоль линии ГНК при различных значениях коэффициента анизотропии пласта при фиксированном расположении скважин и равенства $q_n=q_s$ ($S=1$).

Кривые 1, 2 и 4 соответствуют анизотропному пласту, а кривая 3 – изотропному.

Как видно из рис. 5.12 по главной линии тока происходит внедрение газа в нефтяную область, а по нейтральной-внедрение нефти в газовую область. При этом скорость фильтрации по главной линии ($y=0$) по абсолютной величине всегда выше, чем по нейтральной. На рисунке видно,

что чем выше значение коэффициента анизотропии «К», тем выше значение скоростей на ГНК.

Из рис. 5.12 далее следует, что чем меньше коэффициент анизотропии, тем меньше деформация ГНК.

Отметим, что при $S > 1$ график распределения скоростей без изменения сместится в сторону газовой области, а при $S < 1$ - в сторону нефтяной области.

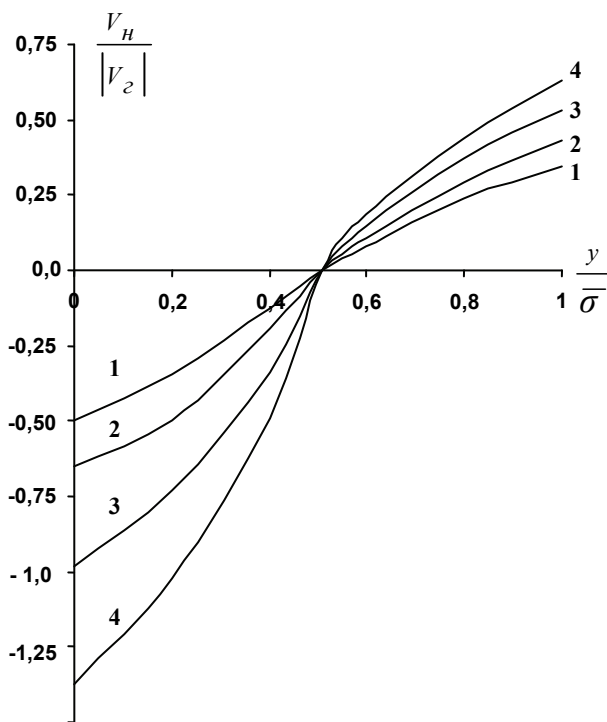


Рис.5.12. Распределение скоростей фильтрации линий ГНК
1 – $K=0,5$; 2 – $K=0,8$; 3 – $K=1$; 4 – $K=1,2$

На рис. 5.13 показано отношение скоростей на нейтральной и главной линии тока в зависимости от расстояния между эксплуатационным рядом скважин и ГНК при различных степенях анизотропии. Как видно из рисунка, с увеличением расстояния ГНК от эксплуатационной батареи деформация уменьшается. Из рис. 5.13, кроме того, видно, как и ранее, что чем больше коэффициент анизотропии, тем деформация выше, но с увеличением расстояния между ГНК и эксплуатационным рядом она уменьшается.

Из приведённого выше мы определили степень и характер мгновенной деформации ГНК в зависимости от анизотропии и расстояния между эксплуатационным рядом и ГНК. Эти результаты были получены при $q_n=q_0$. Из общих рассуждений ясно, что изменением соотношения q_n и q_0 также можно воздействовать на деформацию ГНК.

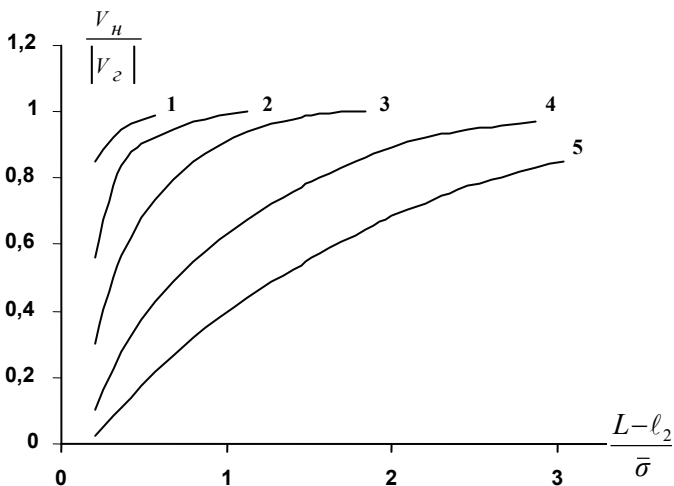


Рис.5.13. Зависимость деформации ГНК от расстояния между эксплуатационным рядом скважин и ГНК
 1 – $K=0,25$; 2 – $K=0,5$; 3 – $K=1$; 4 – $K=2$; 5 – $K=4$

На рис. 5.14 показано изменение $S = \frac{q_n}{q_3}$, которое

обеспечивает недеформируемость контакта при различном расстоянии между ГНК и эксплуатационным рядом скважин и при различных степенях анизотропии.

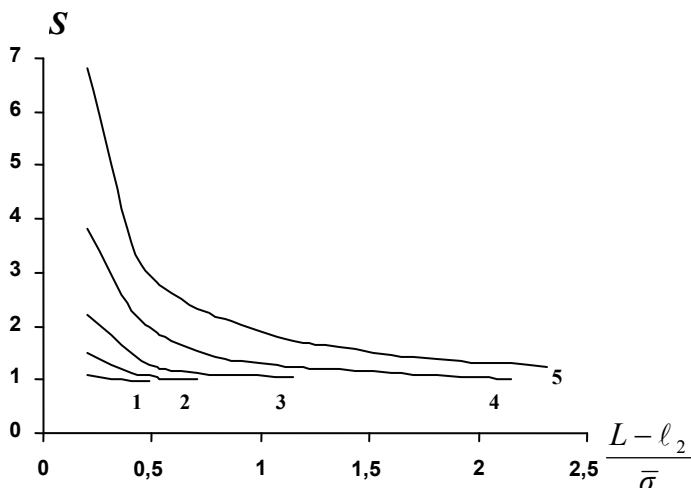


Рис.5.14. Зависимость параметра от расстояния между эксплуатационным рядом скважин и ГНК
 1 – $K=0,25$; 2 – $K=0,5$; 3 – $K=1$; 4 – $K=2$; 5 – $K=4$

Из рис. 5.14 видно, что чем больше анизотропия, тем выше разница в величинах S , но с увеличением расстояния между ГНК и эксплуатационным рядом скважин, разница в величинах S уменьшается и на определённом расстоянии их значения становятся очень близкими. Отметим, что во всех вариантах с изменением расстояния между ГНК и эксплуатационным рядом скважин, S , как и должно быть, стремится к 1.

Вычислим на основании формулы (5.15) значения средневзвешенного давления на линии эксплуатационного ряда скважин при различных α при $S>1$, $S=1$, $S<1$ и при $\alpha=0$ для $S=1$.

В таблице 5.1 даны их значения, откуда видно, что их изменение влияет на средневзвешенное давление, однако в пределах рассмотренных условий это влияние невелико.

Таблица 5.1

Значения средневзвешенного давления
на линии эксплуатационного ряда скважин

	$\alpha \cdot 10^8$ (1/Па)	\bar{P}_z (Па)
2	5	9866625
	10	9865021
	15	9863354
1	5	9678571
	10	9676967
	15	9675300
0,5	5	9490517
	10	9488913
	15	9487246
1	0	9679401

Глава VI.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗРАБОТКИ МНОГОПЛАСТОВЫХ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ, РАЗРАБАТЫВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ СКВАЖИН

Обычно нефтяные, газовые и газоконденсатные месторождения состоят из нескольких продуктивных пластов с разными физико-геологическими характеристиками, которые в свою очередь разделяются между собой непроницаемыми или мало проницаемыми перемычками. Разработка нескольких продуктивных пластов одним общим фильтром приводит как при непроницаемой, так и при малопроницаемой перемычках к быстрому истощению более проницаемых пластов и медленному – в менее проницаемых пластах.

Поэтому при проектировании и анализе разработки многопластовых нефтяных месторождений необходимо решать задачи о взаимодействии пластов, разделенных малопроницаемой перемычкой. Количество перетекающей жидкости или в зависимости от параметров пласта и перемычки может оказать существенное влияние на показатели разработки.

Имеется ряд точных и приближенных решений задач по схемам Мятиева-Гириного и Хантуша стационарного и нестационарного течения жидкости в пласте с учетом утечки через малопроницаемые перемычки [3, 32, 34 и др.].

В тех случаях, когда количество продуктивных пропластков больше двух, получение решений с учетом взаимодействия скважин в пределах упомянутых схем наталкивается на принципиальные трудности.

Решения некоторых задач, полученные в данной главе, должны быть рассмотрены как точные решения выше указанных задач для любого числа пропластков и зон с разными проницаемостями.

6.1 Взаимодействие скважин в неоднородных полосообразных пластах со слабопроницаемой кровлей

В настоящем параграфе решается задача притока жидкости к прямолинейной батарее равнодебитных скважин в ограниченном неоднородном пласте при наличии слабопроницаемой перемычки. Предполагается, что на основании исследований скважин и пластов устанавливается закономерность изменения проницаемости по площади. При замене этой закономерности ступенчатой линией, задача притока жидкости к скважинам в неоднородном пласте, даже при наличии утечки ее в другие горизонты, приводится к задаче в пласте, состоящем из нескольких зон с разными проницаемостями. Батарея эксплуатационных скважин расположена вдоль оси x , над перемычкой поддерживается постоянное давление P_o , а подошва пласта является непроницаемой (рис.6.1).

Требуется найти решение системы уравнений [34]:

$$\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_j}{\partial y^2} - \alpha_j^2 P_j = 0, \quad j = \overline{1,3}, \quad (6.1)$$

удовлетворяющее условиям:

$$\left. \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} \right|_{x=0, \sigma/2} = 0, \quad (6.2)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1(x, y) \Big|_{y=h_1} &= P_2(x, y) \Big|_{y=h_1} \\ K_1 \partial P_1 / \partial y \Big|_{y=h_1} &= K_2 \partial P_2 / \partial y \Big|_{y=h_1} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

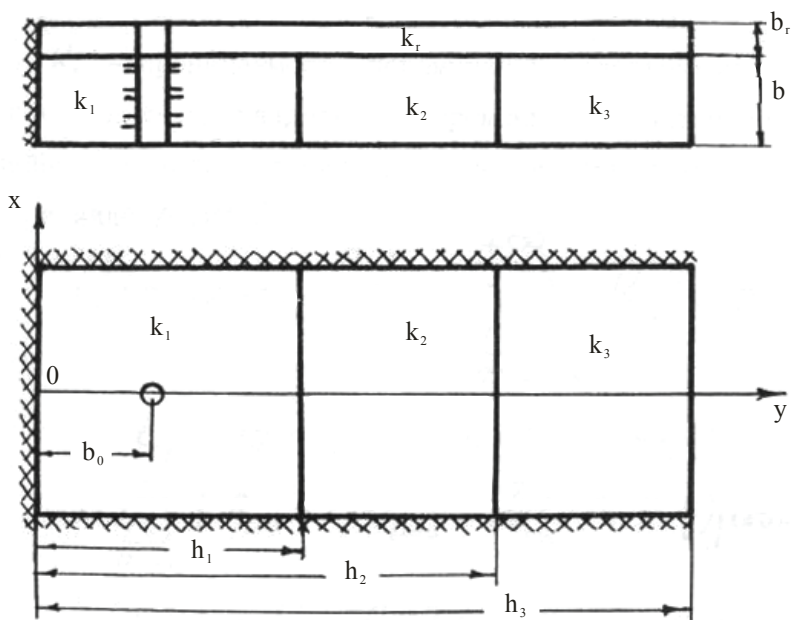


Рис. 6.1. Расчетная схема потока жидкости к батарее скважин в неоднородном пласте со слабопроницаемой кровлей

$$\left. \begin{aligned} P_2(x, y)|_{y=h_2} &= P_3(x, y)|_{y=h_2} \\ K_2 \frac{\partial P_2}{\partial y}|_{y=h_2} &= K_3 \frac{\partial P_3}{\partial y}|_{y=h_2} \end{aligned} \right\}, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad P_3(x, y)|_{y=h_3} = P_k - P_o, \quad (6.5)$$

где

$$P_j(x, y) = P_j(x, y) - P_o, \quad \alpha_j^2 = \kappa z / \kappa_j \epsilon \epsilon_z,$$

K_r, K_j – проницаемости перемычки и отдельных пластов.

Применяя метод разделения переменных с учетом наличия прямолинейной батареи скважин, решение системы уравнений (6.1) находим в виде [34]:

$$P_1(x, y) = -\frac{Q\mu}{2\pi \epsilon \kappa_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_o(\alpha_1 r_n) + C_1 \exp \alpha_1 y + D_1 \exp(-\alpha_1 y) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [A_{1m} \exp \mu_{1m} y + B_{1m} \exp(-\mu_{1m} y)] \cos \lambda_m x, \quad (6.6)$$

$$P_{j+1}(x, y) = C_{j+1} \exp \alpha_{j+1} y + D_{j+1} \exp(-\alpha_{j+1} y) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [A_{(j+1)m} \exp \mu_{(j+1)m} y + B_{(j+1)m} \exp(-\mu_{(j+1)m} y)] \cos \lambda_m x, \quad (6.7)$$

где

$$r_n = [(x - \sigma n)^2 + (y - \epsilon_o)^2]^{1/2}, \quad \lambda_m = \frac{2\pi m}{\sigma},$$

$$\mu_{jm} = (\alpha_j^2 + \lambda_m^2)^{1/2},$$

C_j, D_j, A_{jm}, B_{jm} – неопределенные коэффициенты.

Суммируя выражение $\sum_{n=-8}^{+\infty} K_o(\alpha_1 r_n)$ по формуле Пуассона [63] при условии $y > \epsilon_o$ и $y < \epsilon_o$, с учетом граничных условий (6.2)-(6.5) из (6.4) при значениях $m=n$ для распределения давления в первой зоне имеем:

$$\begin{aligned} \bar{P}_1(x, y) = & \bar{P}_o + \frac{2}{\alpha_1 \sigma \bar{K}_1} \left\{ [M(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o) - \right. \\ & - \sigma \alpha_1 \bar{K}_1 (\bar{P}_\kappa - \bar{P}_o) N(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o)] ch \alpha_1 y + \\ & + sh \alpha_1 (y - \epsilon_o) + 2 \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} [M_n(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o) \times \\ & \left. \times ch \mu_{1n} y + \frac{sh \mu_{1n} (y - \epsilon_o)}{\mu_{1n}}] \cos \lambda_n x \right\}, \quad (6.8) \end{aligned}$$

Если для всех значений n $(2\pi n)^2 \gg (\alpha_1 \sigma)^2$, то с достаточной точностью для давления получается приближенная формула:

$$\begin{aligned} \bar{P}_1(x, y) = & \bar{P}_o + \frac{2}{\alpha_1 \sigma \bar{K}_1} \left\{ [M(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o) - \right. \\ & - \sigma \bar{K}_1 \alpha_1 (\bar{P}_\kappa - \bar{P}_o) N(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o)] ch \alpha_1 y + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + sh\alpha_1(y - \epsilon_o) + \frac{\alpha_1\sigma}{2\pi} \ln \left[1 - 2 \exp \frac{2\pi(\epsilon_o - y)}{\sigma} \times \right. \\
 & \times \cos \frac{2\pi x}{\sigma} + \exp \frac{4\pi(\epsilon_o - y)}{\sigma} \left. \right] + \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} [2M_n(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o) \\
 & ch\mu_{1n}y + \frac{1}{\mu_{1n}} \exp \mu_{1n}(y - \epsilon_o)] \cos \lambda_n x \}, \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

где

$$\bar{P} = \frac{2K_o \epsilon P}{\mu Q},$$

$$\begin{aligned}
 M(K_j, \alpha_j, h_j, \epsilon_o) = & - \left[\delta_1 \xi_3 \frac{e^{-h_1 \alpha_2} - \delta_2 / \delta_1 e^{\alpha_2(h_1 - 2h_2)}}{ch\alpha_1 h_1 (\delta_1 \xi_2 - \xi_1 \delta_2 e^{-2h_2 \alpha_2})} + \right. \\
 & \left. + \frac{sh\alpha_1(h_1 - \epsilon_o)}{ch\alpha_1 h_1} \right],
 \end{aligned}$$

$$N(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o) = -2 \frac{sh\alpha_1(h_1 - \epsilon_o) e^{-\alpha_2 h_2}}{ch\alpha_1 h_1} \times \quad (6.10)$$

$$\frac{(\xi_1 e^{-\alpha_2 h_1} - \xi_2 e^{\alpha_2 h_1}) e^{-\alpha_3(h_2 - h_3)}}{\xi_2 \delta_1 - \xi_1 \delta_2 e^{-2\alpha_2 h_2}},$$

$$M_n(\alpha_j, K_j, h_j, \epsilon_o) = - \left[\frac{sh\mu_{1n}(h_1 - \epsilon_o)}{ch\mu_{1n} h_1} + \right.$$

$$+ \xi_{3n} \delta_{1n} \frac{e^{-\mu_{2n} h_1} - \delta_{2n} / \delta_{1n} e^{\mu_{2n} (h_1 - 2h_2)}}{ch \mu_{1n} h_1 (\delta_{1n} \xi_{2n} - \xi_{1n} \delta_{2n} e^{-2\mu_{2n} h_{1n}})} \Bigg],$$

$\bar{K}_1 = \frac{K_1}{K_o}$, K_o - коэффициент проницаемости для соблюдения размерности. При $x=0$, $y=\epsilon_o + R_c$ забойное давление у скважины определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{1c} = \bar{P}_o + \frac{1}{\alpha_1 \sigma \bar{K}_1} \{ & [M - \sigma \bar{K}_1 \alpha_1 (\bar{P}_k - \bar{P}_o) N] ch \alpha_1 (\epsilon_o + R_c) + \\ & sh \alpha_1 R_c + \frac{\alpha_1 \sigma}{2\pi} \ln[1 - \exp(-2\pi R_c / \sigma)] + \\ & + \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} [2M_n ch \mu_{1n} (\epsilon_o + R_c) + \frac{1}{\mu_{1n}} \exp \mu_{1n} R_c] \}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

или, считая $\alpha_1 R_c \ll 1$, $\frac{2\pi R_c}{\sigma} \ll 1$, для \bar{P}_{1c} находим:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{1c} = \bar{P}_o + \frac{2}{\alpha_1 \sigma \bar{K}_1} \{ & [M - \sigma \bar{K}_1 \alpha_1 (\bar{P}_k - \bar{P}_o) N] \times \\ & \times ch \alpha_1 (\epsilon_o + R_c) - \frac{\sigma \alpha_1}{2\pi} \ln \sigma / 2\pi R_c + \\ & + \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[2M_n ch \mu_{1n} (\epsilon_o + R_c) + \frac{1}{\mu_{1n}} \exp \mu_{1n} R_c \right] \} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Несмотря на то, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\mu_{1n} \exp \mu_{1n} R_c$ в (6.11) и (6.12) расходятся, но в совокупности с другими членами они сходятся.

Из (6.12) можно получить формулу забойного давления для однородного пласта. Указанным путем можно учитывать и влияние неоднородности по проницаемости перемычки. Предполагая, что контур нефтеносности находится на расстоянии y_o в первой зоне, момент прорыва воды в скважину для условий осредненного значения давления определяется по формуле:

$$\tau = - \int_{\eta_o}^{\eta} \frac{d\eta}{F \cdot sh \alpha_1 \sigma \eta + ch \alpha_1 \sigma (\eta - \bar{\epsilon}_o) + E} \rightarrow \quad (6.13)$$

$$\rightarrow \frac{\exp(\bar{\epsilon}_o - \eta)}{sh \pi (\eta - \bar{\epsilon}_o)},$$

где

$$\tau = \frac{Qt}{m \bar{v} \sigma^2}, \quad \eta = y / \sigma, \quad \bar{\epsilon}_o = \epsilon_o / \sigma, \quad \eta_o = y_o / \sigma,$$

$$F(\alpha_j, \bar{K}_j, h_j, \bar{\epsilon}_o) = M(\alpha_j, \bar{K}_j, h_j, \bar{\epsilon}_o) - \sigma \bar{K}_1 \alpha_1 (\bar{P}_k - \bar{P}_o) \times$$

$$\times N(\alpha_j, \bar{K}_j, h_j, \bar{\epsilon}_o),$$

$$E(\alpha_j, \bar{K}_j, h_j, \bar{\epsilon}_o) = \sum_{n=1}^{\infty} [2\mu_{1n} M_n sh \mu_{1n} \sigma \eta + \exp(\sigma \mu_{1n} (\eta - \bar{\epsilon}_o))]$$

По формуле (6.11)-(6.13) проведены расчеты при следующих данных:

$$Q=10^{-3} \frac{м^3}{сек}, \quad b = b_e = 10м, \quad b_o = 200м, \quad h_I = 500м,$$

$$h_2 = 2h_1, \quad h_3 = 3h_1, \quad \sigma = 600 м, \quad R_c = 0,1м,$$

$$y_o = 500м, \quad P_o = P_k = 10^7 Па, \quad \mu = 0,001 Па.сек.$$

для различных значений K_j .

Из таблицы 6.1 видно, что при любых фиксированных значениях K_j проницаемость перемычки K_r незначительно влияет на значение безразмерного забойного давления \bar{p}_c . Значение безразмерного давления \bar{p}_c с ухудшением проницаемости перемычки уменьшается при всех значениях \bar{K}_j . Улучшение же проницаемости первой зоны K_1 , где размещены скважины, способствует увеличению безразмерного забойного давления \bar{p}_c . При всех K_r значения этих давлений в процентном отношении относительно $\bar{K}_1 = 0,2$ изменяются в пределах 2 – 4%. С увеличением проницаемости III зоны при фиксированном K_r , \bar{p}_c почти не изменяется до значения $K_r = 10^{-5}$, а начиная со значения $K_r = 10^{-6}$, \bar{p}_c с увеличением \bar{K}_3 увеличивается. Значение \bar{p}_c , подсчитанные для средних значений проницаемости $K_{ср,j}$ и для неоднородного пласта, когда изменяется проницаемость первой зоны, близки друг к другу.

Таблица 6.1

Результаты расчета безразмерного забойного давления

\bar{K}_j				$K_2 10^{12} \text{ м}^2$					
\bar{K}_1	\bar{K}_2	\bar{K}_3	\bar{K}_{cp}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
$\sigma = 600 \text{ м}$									
0,2	0,5	1	-	189,0	188,9	184,4	180,2	179,2	179,0
-	-	-	0,566	195,9	195,3	192,7	189,4	188,5	188,5
0,5	0,5	1	-	195,4	194,7	192,3	189,9	189,7	189,7
0,5	1	0,5	-	195,4	194,7	192,4	188,6	184,4	184,3
-	-	-	0,666	196,4	195,9	193,6	190,9	190,2	190,1
1	0,5	1	-	197,6	197,1	195,1	193,6	193,5	193,5
0,5	1	1	-	195,4	194,7	192,5	188,4	186,3	186,2
-	-	-	0,833	197,2	196,6	194,6	192,8	192,6	192,6
2	0,5	1	-	198,8	198,3	196,5	195,8	195,6	195,6
0,5	1	2	-	195,4	194,7	192,7	189,2	187,7	187,4
-	-	-	1,166	198,0	197,5	196,6	196,0	195,8	195,8
5	0,5	1	-	199,5	199,0	197,6	197,4	197,3	197,3
-	-	-	2,166	198,9	198,5	197,5	197,1	197,0	197,0
$\sigma = 300 \text{ м}$									
0,2	0,5	1	-	191,1	191,0	182,0	173,5	171,7	171,2
-	-	-	0,566	196,4	195,2	190,1	183,5	181,7	181,6
0,5	0,5	1	-	196,0	194,7	189,8	185,1	184,6	184,6
-	-	-	0,666	196,9	195,8	191,2	185,8	184,5	184,2
1	0,5	1	-	197,9	196,8	192,8	189,7	189,7	190,0
-	-	-	0,833	197,5	196,4	192,4	188,4	187,6	187,5
2	0,5	1	-	198,9	198,0	194,4	192,9	192,9	193,1
-	-	-	1,166	198,2	197,2	195,4	194,2	193,9	193,9
5	0,5	1	-	199,5	198,6	195,6	194,9	195,5	195,8
-	-	-	2,166	198,9	198,2	196,3	195,3	195,2	195,2

Проведенные исследования при $P_0 = 9 \cdot 10^6$ Па показали, что значения забойных давлений во всех рассмотренных

вариантах оказываются ниже (порядка 10%), чем в случае $P_0 = 10^7$ Па.

Расстояние между скважинами, независимо от значений K_r и \bar{K}_1 , несущественно влияет на \bar{P}_c . При всех значениях изменения проницаемости первой зоны с уменьшением K_r при $\sigma = 300$ м уменьшение значения \bar{P}_c более заметно, чем в случае $\sigma = 600$ м. Эти изменения при малых значениях \bar{K}_1 оказываются порядка 10 –12%, а при больших – порядка 2 – 3%.

Из таблицы 6.2 видно, что с уменьшением значения K_r безразмерное время движения частицы жидкости τ_r существенно уменьшается. При $\bar{K}_1 = 5$, по сравнению со случаем $\bar{K}_1 = 0,2$ безразмерное время движения частицы жидкости уменьшается. Причем это уменьшение наиболее заметно при больших значениях K_r . С уменьшением значения K_r указанная разница почти исчезает.

Проведенные расчеты показывают, что при всех диапазонах изменения \bar{K}_j , K_2 , входящими в формулы суммами по сравнению с другими членами можно пренебречь. Эта же задача легко обобщается для случая, когда в пласте, состоящем из нескольких зон с разными проницаемостями, работают прямолинейные батареи скважин.

Таблица 6.2

Результаты расчета безразмерного времени

\bar{K}_j			$K_2 \cdot 10^{12} \text{ м}^2$					
\bar{K}_1	\bar{K}_2	\bar{K}_3	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
0,2	0,5	1	10,13	3,81	1,34	0,85	0,78	0,78
5	0,5	1	3,89	1,68	0,99	0,80	0,78	0,77

6.2 Неустановившееся течение жидкости к системе скважин в залежах со слабопроницаемой перемычкой

При проектировании систем разработки нефтяных месторождений, эксплуатируемых в условиях упругого режима, используются решения различных задач нестационарной фильтрации жидкости в пористых пластах. Обычно при решении таких типов задач применяется операционный метод. Из-за сложности граничных условий и многомерности задачи при помощи этого метода во многих случаях не удастся получить точное решение. В связи с этим в данном параграфе рассмотрены и решены некоторые задачи нестационарной фильтрации жидкости в ограниченных пластах с помощью методов функции Грина и интегральных преобразований с конечными пределами, а затем их решения упрощены с помощью предположенного здесь же метода.

Рассмотрим следующие случаи.

6.2.1. Полосообразная залежь

Предположим, что полосообразная нефтяная залежь ограничена по простиранию и эксплуатируется системой скважин с разными дебитами. Разрабатываемая и вышележащая залежь, в которой давление считаем постоянным, разделяются малопроницаемой перемычкой (рис.6.2). Залежь и жидкость считаем однородными по проницаемости и вязкости; подошву пласта – непроницаемой. Режим пласта замкнуто – упругий, фильтрация жидкости подчиняется закону Дарси. Требуется определить поле давления в продуктивном пласте и количество перетекающей через перемычку жидкости.

Функция давления будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению [34] (см. стр. 184):

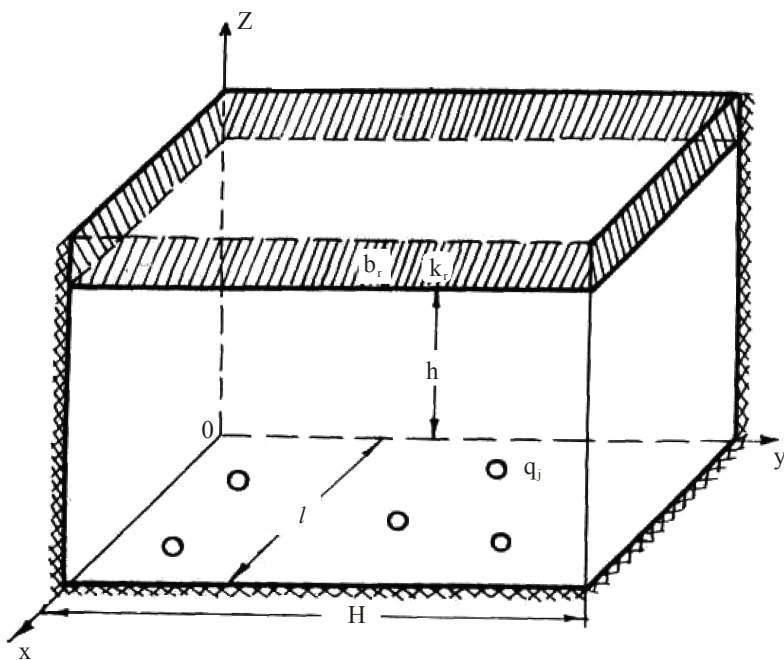


Рис. 6.2. *Схема залежи со слабопроницаемой перемычкой*

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} - \varepsilon^2 P = \frac{\partial P}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^N Q_j \delta(\xi - \xi_j) \delta(\eta - \eta_j). \quad (6.14)$$

где $\xi = \frac{x}{H}, \quad \eta = \frac{y}{H}, \quad \tau = \chi t / H^2,$

$$\varepsilon^2 = \alpha^2 H^2, \quad Q_j = q_j / q_o, \quad [q_o] = \frac{M^3}{c},$$

$$\mathfrak{R} = \frac{\kappa \nu}{\mu q_o} (P_o - P)$$

Граничное и начальное условия задачи имеют вид:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_o} = 0, \quad (6.15)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0,$$

$$P(\xi, \eta, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0,$$

где $\xi_o = l/H$

Предполагая, что функция $P(\xi, \eta, \tau)$ разлагается в ряд Фурье, применяя к уравнению (6.14) и условиям (6.15) конечное интегральное косинус преобразование Фурье по переменным ξ, η , решение задачи получаем в виде:

$$P(\xi, \eta, \tau) = -\frac{2}{\xi_o} \left\{ \frac{P_{joo}}{2\varepsilon^2} (1 - e^{-\varepsilon^2 \tau}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{jmo} [1 - e^{-(\varepsilon^2 + \mu_m^2)\tau}]}{\varepsilon^2 + \mu_m^2} \cos \mu_m \eta + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2B_{jnm} [1 - e^{-(v_n^2 + \mu_m^2)\tau}]}{v_n^2 + \mu_m^2} \cos \lambda_n \xi \cdot \cos \mu_m \eta \}, \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \lambda_n &= \pi n / \xi_o, \quad \mu_m = \pi m, \quad v_n^2 = \varepsilon^2 + \lambda_n^2, \\
 B_{jnm} &= \sum_{j=1}^N Q_j \cos \lambda_n \xi_j \cdot \cos \mu_m \eta_j, \\
 B_{jom} &= \sum_{j=1}^N Q_j \cos \mu_m \eta_j, \\
 B_{jno} &= \sum_{j=1}^N Q_j \cos \lambda_n \xi_j,
 \end{aligned}$$

Отметим, что формула (6.16) для практического использования неудобна. Это объясняется тем, что ряды, не зависящие от времени и входящие в это решение, сходятся очень медленно.

Для упрощения формулы (6.16) воспользуемся косвенным методом суммирования упомянутых медленно сходящихся рядов. С этой целью подберем такую вспомогательную стационарную задачу, решение которой будет соответствовать не зависящим от времени членам, входящим в формулу (6.16).

Функция $P(\xi, \eta)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} - \xi^2 P = \sum_{j=1}^N Q_j \delta(\xi - \xi_j) \delta(\eta - \eta_j), \quad (6.17)$$

и граничным условиям (6.15).

Применяя метод функции Грина к задаче (6.17), (6.15), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 P(\xi, \eta) = & -\frac{1}{\xi_0} \sum_{j=1}^N Q_j \left\{ \frac{1}{v_o shv_o} \left[chv_o(1-\eta_j)chv_o\eta \right. \right. \\
 & \left. \left. + chv_o\eta_j \cdot chv_o(1-\eta) \right] + \right. \\
 & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n \xi_j \cdot \cos \lambda_n \xi}{v_n shv_n} \left[chv_n(1-\eta_j)chv_n\eta, \eta < \eta_j \right] \right. \\
 & \left. \left[chv_n\eta_j chv_n(1-\eta), \eta > \eta_j \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Формула (6.18) и члены, не зависящие от времени, входящие в (6.16), являются решением одной и той же стационарной задачи. Тогда с учетом (6.16) и (6.18) получим формулу для определения поля давлений в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 P(\xi, \eta, \tau) = & -\frac{\sum_{j=1}^N Q_j}{\xi_0} \left\{ \frac{1}{v_o shv_o} \left[chv_o(1-\eta_j)chv_o\eta, \eta < \eta_j \right. \right. \\
 & \left. \left. + chv_o\eta_j chv_o(1-\eta), \eta > \eta_j \right] + \right. \\
 & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch\lambda_n \xi_j \cos \lambda_n \xi}{v_n shv_n} \left[chv_n(1-\eta_j)chv_n\eta, \eta < \eta_j \right. \\
 & \left. \left. + chv_n\eta_j chv_n(1-\eta), \eta > \eta_j \right] - \right. \\
 & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n \xi_j \cos \lambda_n \xi}{\varepsilon^2 + \lambda_n^2} \exp[-(\varepsilon^2 + \lambda_n^2)\tau] - \\
 & - \frac{1}{\varepsilon^2} \exp(-\varepsilon^2\tau) - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_m \eta_j \cos \mu_m \eta}{\varepsilon^2 + \mu_m^2} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp[-(\varepsilon^2 + \mu_m^2)\tau] - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n \xi_j}{v_n^2 + \mu_m^2} \times \\ & \times \cos \mu_m \eta_j \cos \lambda_n \xi \cos \mu_m \eta \exp[-(v_n^2 + \mu_m^2)\tau] \quad (6.19) \end{aligned}$$

В частности, если пласт разрабатывается прямолинейной цепочкой скважин с равными дебитами, расположенной параллельно оси ox в точках $y_j = \bar{\sigma}_o$, $x_j = \frac{l}{N}(j-0.5)$, то приняв $\eta = \bar{\sigma}_o + \bar{R}_c$, $\xi = \xi_1 = l/2NH$, из (6.19) определим выражение фильтрационного сопротивления потока в скважине:

$$\begin{aligned} \Delta P_c &= \frac{\kappa \bar{\sigma}}{\mu q} (P_o - P_c) = -\frac{N}{\xi_o} \left[\frac{ch \varepsilon \bar{\sigma}_o ch(1 - \bar{\sigma}_o)}{\varepsilon sh \varepsilon} - \right. \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \exp(-\varepsilon^2 \tau) + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{nj} ch v_n (1 - \bar{\sigma}_o) ch v_n \bar{\sigma}_o - \\ & - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N f_{nj} \exp[-(\varepsilon^2 + \lambda_n^2)\tau] - \\ & - \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N F_{mj} \exp[-(v_m^2 + \varepsilon^2)\tau] - \\ & \left. - \frac{4}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N \Psi_{nmj} \exp[-(v_n^2 + \mu_m^2)\tau] \right], \quad (6.20) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_{nj} = \sum_{j=1}^N \frac{\cos \lambda_n \xi_j \cdot \cos \lambda_n \xi_1}{v_n sh v_n},$$

$$f_{nj} = \frac{\cos \lambda_n \xi_j \cdot \cos \lambda_n \xi_1}{\varepsilon^2 + \lambda_n^2},$$

$$F_{mj} = \frac{\cos^2 \mu_m \bar{\theta}_o}{\varepsilon^2 + \mu_m^2},$$

$$\Psi_{nmj} = \frac{\cos \lambda_n \xi_1 \cdot \cos \lambda_n \xi_j \cos^2 \mu_m \bar{\theta}_o}{v_n^2 + \mu_m^2}.$$

Как показали проверочные расчеты, ряды, входящие в формулу (6.20), содержащие экспоненты, быстро сходятся даже при малых значениях τ . Доказано, что последним двойным рядом можно пренебречь ввиду его малости по сравнению с суммой остальных слагаемых. Первый ряд в формуле (6.20) представляет собой тригонометрический ряд Фурье. Для получения суммы этого ряда с погрешностью, не превосходящей 1%, в нем достаточно удержать лишь первые четыре члена.

Отметим, что, в частности из полученных формул при $\tau \rightarrow \infty$, $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon = 0$, $\tau \neq \infty$ соответственно получаются формулы для определения поля давлений для стационарного случая и в условиях замкнуто – упругого режима.

6.2.2. Круговая залежь

Теперь рассмотрим вышеприведенную задачу в случае, когда разрабатываемый пласт имеет круговую форму. В этом случае пластовое давление удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению и условиям:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} - \delta_o^2 P =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial \tau_1} - \sum_{j=1}^N Q_j \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_j) \delta(\varphi - \varphi_j), \quad (6.21)$$

$$\left. \begin{aligned} P(\rho, \varphi, \tau_1) \Big|_{\tau_1=0} &= 0, & \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} &= 0, \\ P(\varphi, \rho, \tau_1) \Big|_{\rho \rightarrow 0} &\neq \infty, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \right\}, \quad (6.22)$$

где

$$\rho = r/R_k, \quad \tau_1 = \chi t/R_k^2, \quad \delta_o^2 = \alpha^2 R_k^2,$$

R_k – радиус кругового непроницаемого контура.

Аналогично предыдущему случаю применением метода функции Грина и конечных интегральных преобразований к задаче (6.21) – (6.22) для определения поля давлений при работе в пласте одной круговой батареи равно дебитных скважин $\rho_j = \rho_o$, $\varphi_j = \frac{2\pi}{N}(j-1)$ получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{2\pi k\omega}{\mu q} (P_o - P) = N \left\{ \frac{I_o(\delta_o \rho)}{\delta_o} - \right. \\ &+ \frac{\delta_o}{4N} \ln(\rho^{2N} + \rho_o^{2N} - 2\rho^N \rho_o^N \cos N\varphi) - \\ &- \frac{\delta_o}{2} \ln \frac{\delta_o e^c}{2} - \delta_o \sum_{m=1}^{\infty} D_m(\rho) \cos mN\varphi - \\ &- \frac{\delta_o}{2} \left[-I_o(\delta_o \rho) \ln \frac{\delta_o \rho_o e^c}{2}, \quad \rho < \rho_o \right. \\ &\quad \left. K_o(\delta_o \rho), \quad \rho > \rho_o \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\rho) \exp[-(\delta_o^2 + \lambda_{on}^2)\tau] - \\
 & - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn}(\rho) \exp[-(\delta_o^2 + \lambda_{mn}^2)\tau] \times \\
 & \times \cos mN\varphi - \frac{1}{\delta_o^2} \exp(-\delta_o^2\tau) \Big\}, \quad (6.23)
 \end{aligned}$$

где

$$D_m(\rho) = \frac{I_{mN}(\delta_o\rho_o)I_{mN}(\delta_o\rho)K_{mN}(\delta_o)}{I_{mN}(\delta_o)},$$

$$E_n(\rho) = \frac{J_o(\lambda_{on}\rho)J_o(\lambda_{on}\rho_o)}{(\delta_o^2 + \lambda_{on}^2)J_o^2(\lambda_{on})},$$

$$\Phi_{mn}(\rho) = \frac{J_{mN}(\lambda_{nm}\rho)J_{mN}(\lambda_{nm}\rho_o)}{(1 - m^2/\lambda_{nm}^2)J_{mN}^2(\lambda_{nm})} \cdot \frac{1}{\delta_o^2 + \lambda_{on}^2},$$

λ_{nm} - неотрицательные корни уравнения

$$J_n(\lambda_{nm}) = 0, \quad (6.24)$$

$C=0,5772$ -число Эйлера.

Формула (6.23) получена при малых значениях аргумента функции Бесселя $I(x)$, $K(x)$.

Отметим, что корни уравнения (6.24) λ_{nm} при больших значениях N оказываются достаточно большими. Поэтому ряды, входящие в (6.23) и содержащие экспоненты, очень быстро сходятся. С учетом вышесказанного из (6.23) при $\rho = \rho_o + \rho_c$, $\varphi = 0$ находим перепад давления в скважине в виде:

$$\Delta P_c = N \left\{ \frac{1}{\delta_o} - \frac{\delta_o}{2N} \ln \frac{\rho_o}{N\rho_c} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\delta_o^2} \exp(-\delta_o^2 \tau) - \delta_o \sum_{m=1}^{\infty} D_m(\rho_o) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\rho_o) \exp[-(\delta_o^2 + \lambda_{on}^2) \tau] \right\}, \quad (6.25)$$

где λ_{on} - определяются из уравнения

$$J_n(\lambda_{on}) = 0, \quad \rho_o = R_\delta / R_k, \quad \rho_c = R_c / R_k$$

В заключение отметим, что при помощи вышеуказанного приема можно решить различные нестационарные задачи подземной гидродинамики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей монографии приводятся теоретические исследования в области моделирования фильтрационных процессов флюидов в залежах, подвергающихся различным напряженно-деформационным состояниям, проведенные авторами в течение нескольких лет.

На основании этих исследований:

- построена математическая модель динамики развития дилатансионно-пластической зоны, вокруг действующей центральной скважины, получены аналитические выражения для гидрогазодинамических параметров пласта и пластового давления, определена интенсивность выноса разрушенной породы в зависимости от механических характеристик пласта и дебита скважины;

- получено автомодельное решение задачи при локализации пластической зоны в окрестностях забоя скважины. На конкретном примере показано, что основными факторами, влияющими на интенсивность выноса песка, являются глубина залегания, уплотненность и состояние поверхности забоя, депрессия в пласте, пластовое давление, ухудшение проницаемости и дебит скважины при нестационарном режиме фильтрации флюидов;

- создана методика для определения гидрогазодинамических параметров пласта и распределение давления в дилатансионно-пластической зоне вокруг действующей скважины при фильтрации жидкости и газа в деформируемых пластах;

- сформулированы и при помощи точных аналитических методов решены задачи о нестационарной фильтрации

жидкости к совершенным и несовершенным скважинам в однородных, однородно-анизотропных и кусочно-однородных по проницаемости пластах, коллекторы которых находятся в напряженно-деформационных состояниях различного характера.

Данная проблема настолько сложна и многогранна, и, несмотря на то, что многие исследователи, в том числе и авторы настоящей монографии, занимались и занимаются ею на протяжении длительного времени, считать ее исчерпанной нельзя.

Большой интерес вызывают в последние годы задачи по адаптации гидродинамических моделей залежей с использованием промысловых данных по скважинам, значительно повышающих точность расчетных прогнозных показателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абасов М.Т., Азимов Э.Х., Кулиев А.М. Гидротермодинамические исследования скважин глубокозалегающих месторождений. Баку: Азербайджанское государственное издательство. 1993, 176 с.
2. Абасов М.Т., Джалалов Г.И., Джалилов К.Н. и др. Гидрогазодинамика трещиноватых коллекторов. Баку: Элм, 1988, 292 с.
3. Абасов М.Т., Джалилов К.Н. Вопросы подземной гидродинамики в разработке нефтяных и газовых месторождений. Баку: Азернешр, 1960, 225 с.
4. Абасов М.Т., Джалилов К.Н., Керимов З.А., Мирзоева Д.Р. О фильтрации жидкости в релаксационно-сжимаемом и ползучем пластах при релаксации скорости и давления// Известия АН Азербайджана, серия Наук о Земле, 2000, № 2, с. 25-38.
5. Абасов М.Т., Джеваншир Р.Д., Иманов А.А., Джалалов Г.И. О влиянии пластового давления на изменение фильтрационно-емкостных свойств терригенных пород-коллекторов в процессе разработки месторождений нефти и газа // М.: Геология нефти и газа, 1997, № 5, с. 34-39.
6. Абасов М.Т., Иманов А.А., Джалалов Г.И. Деформация глубокозалегающих природных резервуаров залежей нефти и газа при разработке. // М. ВНИИОЭНГ, Геология, геофизика и разработка нефтяных месторождений, 2006, № 4, с. 62-66.
7. Авербух А.З., Ахияров В.Х., Жиркевич В.Ю. и др. Математическое моделирование процессов подземной гидродинамики в напряженно-деформированных средах // Докл. РАН, 1995, Т. 340, № 1, с. 51-55.
8. Акилов Ж.А. К определению релаксационных параметров неравновесной фильтрации //Изв. АН Уз. ССР, сер. Тех. Наук.- 1982.- №5.- С. 50-54.
9. Акилов Ж.А. О гидродинамическом методе определения релаксационных характеристик неравновесной фильтрации //Докл. АН Уз.ССР.- 1983.- № 4.-с.20-23.

10. Алишаев М.Г. Мирзаджанзаде А.Х. К учету запаздывания в теории фильтрации //Изв. вузов. Нефть и газ. 1975, № 6, с. 71-74.
11. Аметов И.М, Басниев К.С Фильтрация жидкости и газа в ползучих средах //Изв. АН СССР, сер. Механика жидкости и газа.-1981.-№ 4.-с. 150-153.
12. Аметов И.М. Фильтрация газированной жидкости при неравновесных условиях // Изв. АН СССР, сер. Механика жидкости и газа.-1980.-№3.- с. 144-148.
13. Аметов И.М. О моделях, учитывающих явления запаздывания при фильтрации жидкости через пористую среду // Изв. Вузов СССР, сер. Нефть и газ.- 1977.-№ 3.- с. 58-60.
14. Атаев Г.Н. Исследование дилатансионно-пластических характеристик зон пласта вокруг работающей скважины и процесса пескопроявления: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Баку, 2000, 121 с.
15. Афанасьев Е.Ф., Николаевский В.Н. Нелокально-упругий режим фильтрации и восстановление давления в глубинных пластах // ПМТФ, 1969, 35, с. 113-116.
16. Афанасьев Е.Ф. К обоснованию теории нелокально-упругого режима фильтрации при помощи уравнений теории упругости // ПМТФ, 1971, № 4, с. 82-86.
17. Афанасьев Е.Ф., Зотов Г.А. Об устойчивости призабойной зоны // Тр. ин-та нефтегаз им.И.М.Губкина. М.: Недра, 1976, вып. 116, с. 96-102.
18. Ахмедов К.А., Мамедзаде Р.Б., Мамедов Т.М., Федорцов В.К. Определение гидродинамических и релаксационных параметров деформируемого коллектора по данным нестационарных исследований //Изв. Вузов, сер. Нефть и газ.- 1985.-№4.- с. 38-40.
19. Бан А., Богомолова А.Ф., Максимов В.А. и др. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. М.: Гостоптехиздат, 1962, 275 с.
20. Басниев К.С. и др. Подземная гидродинамика. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2005, 496 с.
21. Баренблатт Г.И., Ентов В.М, Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах.- М.: Недра, 1984.-208с.

22. Баренблатт Г.И, Крылов А.П. Об упруго- пластическом режиме фильтрации // Изв. АН СССР, ОТН.-1955.-№2.-с.5-13.
23. Баренблатт Г.И. О некоторых задачах восстановления давления и распространения волны разгрузки при упруго-пластическом режиме фильтрации // Изв. АН СССР, ОТН.-1955.- № 2.-14-26с.
24. Бузинов С.Н.. Умрихин И.Д. Исследование нефтяных и газовых скважин и пластов.-М:Неффа, 1984.-269с.
25. Булатов В.В. Глубинная геомеханика. М.: Недра, 1990, 264 с.
26. Временное руководство по гидродинамическим методам изучения фильтрационных свойств залежей нефти и газа, характеризующихся высокими пластовыми давлениями // Абасов М.Т., Азимов Э.Х., Абдуллаев М.К. и др., под руководством Абасова М.Т., Кулиева А.М.- Баку: 1978.-127с.
27. Горбунов А.Т. Разработка аномальных нефтяных месторождений. М.: Недра, 1981, 237 с.
28. Горшкова Е.В. Экспериментальные исследования влияния эффективного давления и температуры на свойства пород природных резервуаров. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата геолого-минералогических наук. Баку – 2009. - 24 с.
29. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматиз, 1963, 1100 с.
30. Графутко С.В., Николаевский В.Н. Задача о выносе песка в работающую скважину. М.: Мех. жид. и газа, 1998, №5, с. 130-138.
31. Гринберг Г.А Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. -М: Изд.АН СССР.-1948.- 728с.
32. Гусейнзаде М.А.. Колосовская А.К. Упругий режим в одно-пластовых и многопластовых системах. - М: Недра, 1972. - 456 с.
33. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z -преобразования.- М: Наука, 1971.- 288 с.
34. Джалалов Г.И. Гидрогазодинамика разработки нефтяных и газовых залежей в деформируемых коллекторах: Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, 1990,

502 с.

35. Джалалов Г.И., Дунямалыев М.А. Математическое моделирование фильтрации жидкости в средах с различными ядрами ползучести. Научные труды НИПИ «Нефтигаз» SOCAR, 2011, № 3, с. 52-54.
36. Джалалов Г.И., Дунямалыев М.А., Ханбабаева М.Г. Приток жидкости к несовершенной скважине в однородном пласте с ползучей средой. Научные труды АТУ, 2010, № 2, с. 67-72.
37. Дияшев Р.Н., Костерин А.В., Скворцов Э.В. Фильтрация жидкости в деформируемых нефтяных пластах, Казань, 1999, с.238.
38. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление.- М: Высшая школа, 1966.- 408с.
39. Добрынин В.М. Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа.- М: Недра, 1970.- 239с.
40. Дунямалыев М.А. О нестационарной фильтрации газа в неоднородных ползучих средах // Изв. АН Азерб. ССР, сер физ.-тех. мат. наук.- 1983.- № 4.- с. 159-160.
41. Дунямалыев М.А. Нестационарная фильтрация газа в неоднородных круговых ползучих средах // Тр. Ин-та / Азерб. Полит. Ин-т- 1984.- с. 45-51.
42. Дунямалыев М.А. О фильтрации газа в изолированных пластах с учетом ползучих сред // Изв. Вузов СССР, сер Нефть и газ.- 1984.-№ 12.- с. 34-38.
43. Дунямалыев М.А. Приток газа к системе несовершенных скважин в неоднородных ползучих средах, разделенных слабопроницаемой перемычкой // Изв. Вузов СССР, сер Нефть и газ.- 1987.- № 12.- с. 38-42.
44. Дунямалыев М.А. Об одной задаче нестационарной фильтрации газа к несовершенным скважинам в неоднородных ползучих средах при обобщенных ядрах ползучести. Баку. Указ. Деп. Науч. Работ. ВНИТИ № 9 (215), 1989.
45. Дунямалыев М.А. Нестационарная фильтрация жидкости к системе несовершенных скважин в неоднородных ползучих пластах, разделенных слабопроницаемой перемычкой // Изв. АНАзерб. ССР, Серия Науки о Земле, № 2, 2000.
46. Дунямалыев М.А. Теория и методы расчета релаксационных

- процессов при разработке глубокозалегающих нефтяных и газовых месторождений: Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – Баку, 1990, 277 с.
47. Ержаное Ж.С. Теория ползучести горных пород и ее приложения. –Алма-Ата, Наука. -1964-175с.
 48. Желтов Ю.П. Деформация горных пород. М.: Недра, 1966, 198 с.
 49. Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: Недра, 1975, 216 с.
 50. Завовский А.Ф. О напряженном состоянии насыщенного пласта в окрестности эксплуатационной скважины // Изв. АН СССР, МТТ, 1980, № 3, с. 111-119.
 51. Зотов Г.А., Динков А.В., Черных В.А. Эксплуатация скважин в неустойчивых коллекторах.- М: Недра, 1987.- 172с.
 52. Исаев Р.Г., Брыков А.А. Некоторые особенности фильтрации в неупругих пористых средах // Изв. Вузов СССР, сер. Нефть и газ.- 1970.- №11. с. 69-73.
 53. Исаев Р.Г. К учету наиболее характерных особенностей пласта и флюидов в процессах фильтрации в глубокозалегающих продуктивных пластах с новыми реологическими свойствами // Изв. Вузов СССР. Сер. Нефть и газ.- 1973.- № 1.-с.69-72.
 54. Исаев Р.Г. Течение и отдача пластовых флюидов при разработке глубокозалегающих трещиноватых и трещиновато-пористых пластов (основы теории, проекту прилож.): Автореф. дис. доктора техн. наук. – М., 1989. – 33 с.
 55. Исрафилов Р.М. Напряженное состояние массива в окрестности выработок произвольных поперечных сечений с учетом нестационарности фильтрации газа // Прикл. Механика, 1986. т. 22, № 8, с. 14-21.
 56. Кашников Ю.А., Ахишихин С.Г., Назаров А.Ю. и др. Экспериментальные исследования влияния пластового давления на фильтрационно-емкостные характеристики терригенных коллекторов месторождения Пермского края// Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений, 2007, 3 1, с. 41-50.

57. Кашников Ю.А., Гладышев С.В., Попов С.Н., Кашников О.Ю. Изменение фильтрационно-емкостных и физико-механических свойств терригенных коллекторов при продолжительном действии повышенного эффективного давления // Известия ВУЗов: Нефть и газ, 2006, №1, с. 25-32.
58. Кулиев А.М., Дунямалыев М.А., Эфендиев Р.М., Казымов Б.З. Моделирование разработки глубокозалегающих месторождений с учетом ползучести горных пород.// Известия АН Азербайджана, Серия Науки о Земле, 2000, № 2, с. 18-24.
59. Кулиев А.М, Казымов Б.З. Деформация горных пород и ее влияние на их фильтрационно-емкостные свойства и на процессы фильтрации и разработки месторождений нефти и газа. Баку: 2009, 88 с.
60. Кязымов Ш.П., Рамазанов Т.К. Расчет выноса песка из действующей скважины.//Azərbaycan neft-qaz yataqlarının işlənməsi, Elmi əsərlər toplusu, Bakı, 1999, с. 162-170.
61. Мамедов К.К. Эксплуатация нефтяных скважин в осложненных условиях. Баку.: Чашиоглу, 1999, 342 с.
62. Мамедов Т.М., Рейтенбах В.Г. Лабораторное исследование ползучести пород коллекторов // Изв. Вузов, сер. Нефть и газ.- 1981. №11.-с. 27-31.
63. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Пер. С англ.- М.: Гостоптехиздат, 1949,- 628с.
64. Мейз Дж.Теория и задачи механики сплошных сред.-М: Мир, 1974.-319с.
65. Мирзаджанзаде А.Х. и др. Фрагменты разработки морских нефтегазовых месторождений. Баку.: Элм, 1997, 408 с.
66. Мирзаджанзаде А.Х., Шахвердиев А.Х. Динамические процессы в нефтегазодобыче. М.: Наука, 1997, 254 с.
67. Мирзоева Д.Р. Гидродинамические методы исследования процессов релаксационной фильтрации: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Баку, 2002, 151 с.
68. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т. и др. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970, 336 с.
69. Николаевский В.Н. К изучению нелокальных эффектов при

- упругом режиме фильтрации в глубинных пластах // ПМТФ. -1968. - № 4. –С. 35-38.
70. Николаевский В.Н., Рамазанов Т.К. Напряженно- деформированное состояние горного массива при нелокально – упругом режиме фильтрации жидкости в пласте // Изв. АН СССР, МТГ, 1977, № 3, с. 138-141.
71. Николаевский В.Н., Рамазанов Т.К. Напряженно- деформированное состояние пласта с учетом фильтрации жидкости // ФТПРПИ, 1982, № 5, с. 37-49.
72. Николаевский В.Н., Рамазанов Т.К. Напряженно- деформированное состояние пласта и восстановление давления в скважине // Мех. Деформируем. тела. « Прочность и вязкоупругопластичность». М.: Наука, 1986, с. 94-105.
73. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996, 447 с.
74. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций.- М.: Наука, 1966.-752с.
75. Рамазанов Т.К., Гюльмамедов М.Х., Ханбабаева М.Г. Динамика дилатансионно-пластической зоны вокруг действующей скважины и интенсивность твердой породы.// АМЕА-nın Хəбərлəri, Yер elmləri, 2006, № 2, с. 55-64.
76. Рамазанов Т.К., Гюльмамедов М.Х., Ханбабаева М.Г. Эксплуатация газовой скважины в условиях неустойчивости призабойной зоны // Вестник Бакинского Университета. 2008, № 2, с. 102-108.
77. Рамазанов Т.К. Пластические зоны вокруг действующей скважины// Известия ВУЗОВ, Нефть и газ, 1996, № 3-4, с. 13-19.
78. Рамазанов Т.К. Ханбабаева М.Г. Динамика развития дилатансионно-пластической зоны вокруг эксплуатационной скважины и процесса пескопроявления / Тезисы международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения чл. корр. НАНА, профессора И.Т.Мамедова, Баку, 2005, с. 166.
79. Рамазанов Т.К. Ханбабаева М.Г. Определение гидродинамических параметров и размеров дилатансионно-пластической зоны пласта вокруг действующей скважины //

- Научный журнал «Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых». РАН Сибирское отделение, 2009, январь-февраль, № 1, с. 30-40.
80. Рамазанов Т.К., Ханбабаева М.Г. Установившееся движение идеального газа в зонально-однородном дилатансионно-пластическом и упругом круговом пласте // Вестник Бакинского Университета, 2009, № 3, с. 85-92.
 81. Рейнер М. Реология. Пер. с англ. М: Наука, 1965.-223с.
 82. Рейнер М. Деформация и течение. Пер. с англ.- М:- Гостехиздат, 1965.-381с.
 83. Ржаницын А.Р. Теория ползучести.- М: Стройиздат, 1968.- 416с.
 84. Снеддон И, Преобразования Фурье. Пер. с англ. М.: Изд-во иномтранной литературы, 1955, 668 с.
 85. Теория и практика применения неравновесных систем в нефтедобыче / Мирзаджанзаде А.Х., Магсудов Ф.Г, Нигматулин Р.И. и др.- Баку: Элм, 1985-220с.
 86. Терцаги К. Теория механики грунтов М.: Госстройиздат, 1961, 507 с.
 87. Требин Ф.А., Черных В.А. Напряженное состояние нефтегазоводоносных пластов при их разработке // Инженерный журнал: Механика твердого тела. М.:, 1967, с. 137-140.
 88. Фильтрационные процессы и идентификация параметров в многопластовых месторождениях/ М.Т.Абасов, Э.Х.Азимов, С.С.Азимова, Г.И.Джалалов, Т.Т.Ибрагимов, Н.Т.Караева/. Баку: Изд-ва «Nafta-Press», 2008, 302 с.
 89. Флорин В.А Основные уравнения консолидации земляной среды // Докл. АН СССР,-1948.- № 1.-с. 21-24.
 90. Ханбабаева М.Г. Дилатансионно-пластические расчеты разрушений в призабойной зоне действующей скважины/ Тезисы XII международной конференции по математике и механике, посвященной 70 летнему юбилею чл. корр. НАНА, профессора Б.А.Искендерова, Баку, 2006, с. 167.
 91. Ханбабаева М.Г. Моделирование процессов фильтрации флюидов в деформируемых пористых средах при различных напряженных состояниях. Диссертация на соискание научной степени доктора философии по математическим

- наукам. Баку, 2010, 117 с.
92. Ханбабаева М.Г. Расчеты дилатансионно- пластических разрушений вокруг действующей скважины // АМЕА-нүн Хәбәрләги, Fizika-texnika və riyaziyyat elmləri seriyası, riyaziyyat və mexanika buraxılışı. 2006, № 7, с. 139-144.
 93. Ханбабаева М.Г. Эксплуатация газовой скважины в условиях неустойчивости призабойной зоны /Тезисы научной конференции, посвященной 100-летию заслуженного деятеля науки, академика А.И.Гусейнова, БГУ, 2007, с. 149-150.
 94. Хасаяев А.М., Эфендиев И.Ю., Шаронова И.А. Об одной возможной причине разрушения структуры породы нефтяного пласта // Азербайджанское нефтяное хозяйство. 1998, № 2-3, с. 12-16.
 95. Хорошун Л.П., Исрафилов Р.М. О напряженном состоянии гидронасыщенного массива в окрестности выработки квадратного поперечного сечения // Прикл. Механика. 1984, т. 20, № II, с. 108-111.
 96. Черных В.А., Требин Ф.А. Напряженное состояние нефтегазоводоносных пластов при их разработке // Инж.журн. МТТ, 1967, №3, с. 137-140.
 97. Черных В.А. Нелинейно-упругий режим фильтрации в упруго-вязкой пористой среде // Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, №2, с. 163-167.
 98. Черных В.А. Геомеханика - новое понятие в теории разработки нефтяных и газовых месторождений // Вопросы методологии и новых технологий разработки месторождений природного газа. Часть 1. М.: ВНИИГАЗ, 1994, с. 34-82.
 99. Черных В.А. Гидрогеомеханика нефтегазодобычи. М.: ОАО «Газпром», ООО «ВНИИГАЗ», 2001, 277 с.
 100. Щелкачев В.Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. М.: Издат. Нефть и газ., 1995, ч. 2, 493 с.
 101. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // J.Appl.Phys. 1955, v.26, N2, p. 182-194.
 102. Bishop A.w. Shear strength parameters for undisturbed and

- remolded soil specimens, Stress-strain behavior of soils (ed. by R.H.G. Parry)/ Proceedings of the Roscoe Memorial Symposium, Cambridge University, 1972, D. 3-58. p. 134-139. Пер. на рус. яз. Определяющие законы механики грунтов., Механика, Новое в зарубежной науке. – Издат. Мир, 1995, вып. 2. –С. 7-75.
103. Jacob C.E. On the flow of water in an elastic artesian aquifer // Trans. Americ. Geophys. Union, Reports and Papers. Hydrology. 1940, N7, pt. II, p. 547-586.
104. Jalilov G.N., Kerimov Z.A., Mirzoyeva D.R. Direct and inverse problems of relaxation direct filtration// Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan. Mathematics and Mechanics, 2000, v. XX, N 1, p. 196-202.
105. Ramazanov T.G., Atayev G.N. Development of plastic zone around a hole in dilatating medium with unevenly changing properties. Baki. Transaction of academy of sciences of Azerbaijan, 1999, N1-2, “ELM” publishing house. p. 206-215.
106. Sulem J., Muhlhaus Hans-B. A continuum model for periodic two-dimensional block structures // Mechanics of cohesive-frictional materials. 1997, v.2, N 1, p. 21-46.
107. Xanbabayeva M.H. Calculations of dilatational plastic failures around running well // Translations issue mathematics and mechanics series of physical-technical&mathematical science. 2006, № 7, p. 139-144.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава I. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ВЛИЯНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ГОРНЫХ ПОРОД НА ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЗАЛЕЖАХ НЕФТИ И ГАЗА	6
Глава II. ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ДИНАМИКИ ДИЛАТАНСИОННО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ ВОКРУГ ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СКВАЖИНЫ В СЛАБОЦЕМЕНТИРОВАННЫХ НЕФТЯНЫХ КОЛЛЕКТОРАХ.....	16
2.1. Постановка задачи	16
2.2. Решение задачи в пластической зоне $[a(t) \leq r \leq R(t)]$	21
2.3. Решение задачи в упругой зоне $[r \leq R(t) \leq \infty]$	26
2.4. Определение интенсивности выноса твердой фазы породы пласта на стенке скважины.	30
2.5. Автомодельное решение задачи при локализации в ближней окрестности забоя скважины.	41
Глава III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДИЛАТАНСИИ ПОРОДЫ НА ПРОЦЕСС ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ГАЗОВОЙ СКВАЖИНЫ.	48

3.1. Неустановившаяся осесимметричная фильтрация идеального газа к мгновенно включенной с постоянным дебитом скважине.	49
3.2. Автомодельное решение.	53
3.3. Установившееся движение идеального газа в зонально-однородном дилатансионно-пластическом и упругом круговом пласте.	60

Глава IV.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛЗУЧЕМ ПЛАСТЕ.	75
4.1. Приток жидкости к несовершенной скважине в круговом однородном пласте.	76
4.2. Результаты численных расчетов.	85
4.3. Нестационарная фильтрация жидкости к несовершенной скважине в неоднородных ползучих средах.	92
4.4. Решение интегро-дифференциального уравнения фильтрации с учетом ползучести в анизотропной среде.	101
4.5. О нестационарном движении жидкости к скважинам в изолированных пластах с учетом ползучести сред.	116
4.6. О решении интегро-дифференциальных уравнений фильтрации жидкости с учетом ползучих сред.	126
4.7. Математическое моделирование фильтрации жидкости в средах с различными ядрами ползучести.	132
4.8. Решение уравнения фильтрации в неоднородной среде с учетом ползучести.	138

Глава V.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ ЗАВОДНЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ДЕФОРМИРУЕМОГО ОДНОРОДНО-АНИЗОТРОПНОГО ПЛАСТА.	145
5.1. Изучение влияния анизотропии проницаемости на коэффициент охвата.	145
5.2. Влияние степени и угла ориентации анизотропии по проницаемости деформируемой среды на дебит скважин.	154

5.3. Исследования условий ограничения подвижности газонефтяного контакта в деформируемом пласте 163

Глава VI.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗРАБОТКИ МНОГОПЛАСТОВЫХ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ, РАЗРАБАТЫВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ СКВАЖИН 171

6.1 Взаимодействие скважин в неоднородных полосообразных пластах со слабопроницаемой кровлей 172

6.2 Неустановившееся течение жидкости к системе скважин в залежах со слабопроницаемой перемычкой 182

6.2.1. Полосообразная залежь. 182

6.2.2. Круговая залежь 188

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 192

ЛИТЕРАТУРА..... 194

СОДЕРЖАНИЕ..... 204

Г.И.Джалалов, М.А.Дунямалыев, М.Г.Ханбабаева

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДОВ
В НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ
ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

Директор издательства Э.А.Алиев
Директор типографии С.О.Мустафаев
Компьютерный дизайн А.А.Алимамедова

Подписано в печать 27.06.2012.
Формат 60x90 ¹/₁₆. Ф.п.л. 13. Тираж 500 экз.

Издательство «Чашыюглу».
Типография «Чашыюглу»,
г. Баку, ул. М.Мушфига, 2Е